

КІБЕРНЕТИКА та КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.85

DOI:10.34229/2707-451X.21.2.2

В.М. ДУБІНСЬКИЙ, О.В. ПАНКРАТОВ, Т.Є. РОМАНОВА,
Б.С. ЛИСЕНКО, Р.В. КАЯФЮК, О.О. ЖМУД

ОПУКЛА БАГАТОКУТНА ОБОЛОНКА ДЛЯ ПАРИ НЕРЕГУЛЯРНИХ ОБ'ЄКТІВ

Вступ. Задачі оптимального розміщення (розкрою та пакування) цікаві як з теоретичної, так і з практичної точки зору. Прикладами застосування задач розміщення у виробництві є розкрій металу, текстилю, скла, шкіри та фурнітури, 3D друк. Добре відомо, що навіть одновимірний випадок проблеми знаходження оптимального використання заданого ресурсу, класична задача про укладку ранцю, належить до класу NP-складних задач оптимізації. З огляду на це, у більшості випадків, пов'язаних із задачами розміщення, застосовують евристичні підходи. Тим не менш, розробка аналітичних методів математичного моделювання – актуальна проблема для розширення класу задач розміщення, що можливо розв'язати оптимально за допомогою сучасних NLP-solvers.

У даному дослідженні розглянуто задачу оптимального розміщення нерегулярних двовірних об'єктів в обмежувачій опуклої багатокутної області.

Побудова опуклої оболонки для заданого числа фіксованих об'єктів – класична задача обчислювальної геометрії [1 – 3], що має важливі додатки в задачах упаковки і розкрою, які виникають у виробництві, дослідженні операцій, механіці, хімії [4, 5]. Дослідниками запропоновано різні ефективні методи розв'язання цієї задачі, наприклад, в роботах [6, 7]. Задача ускладнюється, коли об'єкти вільно переміщуються і обертаються без взаємного перетину. В цьому випадку можуть бути побудовані різні опуклі оболонки в залежності від параметрів розміщення об'єктів. Відповідно, виникає задача побудови опуклої оболонки з мінімальним периметром (площею) ([6, 8]). Цю задачу можна також інтерпретувати як упаковку довільних об'єктів у мінімальний опуклий контейнер [9].

Поліноміальні методи вирішення для побудови опуклих оболонок мініимального периметра відомі для двох або трьох багатокутників [10] і / або для багатокутників з обмеженням на трансляції / обертання [11].

В роботі [12] розглянуті методи побудови опуклої оболонки довільного числа дисків з мінімальним периметром з аналітичним розв'язком, отриманими для трьох дисків. В роботі [13] вивчалася чисельно і аналітично задача про мінімальну поверхню опуклої оболонки сфер.

Однією з важливих задач теорії геометричного проектування є побудова опуклої багатокутної оболонки для пари двовірних об'єктів, що мають довільну просторову форму. Над об'єктами можуть здійснюватися перетворення неперервних обертань та трансляцій. Як функція цілі розглядаються периметр або площа опуклої оболонки. Будується математична модель із застосуванням методу ρ -функцій. Пропонуються два алгоритми розв'язання. Наводяться результати обчислювальних експериментів.

Ключові слова: опукла багатокутна оболонка, нерегулярні об'єкти, метод ρ -функцій, нелінійна оптимізація.

© В.М. Дубинський, О.В. Панкратов,
Т.Є. Романова, Б.С. Лисенко,
Р.В. Каяфюк, О.О. Жмуд, 2021

У даному дослідженні постановку задачі сформульовано наступним чином. Дано два довільних геометричних об'єкта, обмежених дугами окружностей та відрізками прямих. Над об'єктами можуть здійснюватися неперервні повороти та трансляції за умови їх неперетину.

Потрібно знайти мінімальний розмір обмежуючої області, що являє собою опуклу багатокутну мінімальної площі або периметру та відповідні параметри розміщення об'єктів.

Між об'єктами та між кожним об'єктом і границею обмежуючої області можуть бути задані мінімально допустимі відстані.

Постановка задачі. Припустимо, що будь-який розміщений об'єкт T (об'єкт, який має бути розміщений у визначеній області), – це двомірний однозв'язний ϕ -об'єкт.

Визначення 1 [14]. Канонічно замкнута точкова множина $T \subset R^2$ ($T = cl^*(T) = cl(int(T))$), що має гомотопічний тип такий же, як і гомотопічний тип її внутрішності ($int(T)$).

Границя кожного однозв'язного ϕ -об'єкта T задається послідовністю граничних елементів l_1, l_2, \dots, l_n (нумерація ведеться за годинниковою стрілкою). Кожний елемент l_i задається вектором $(x_i, y_i, r_i, x_{c_i}, y_{c_i})$, якщо l_i є дугою або вектором (x_i, y_i, r_i) , якщо l_i є відрізком прямої, де (x_i, y_i) і (x_{i+1}, y_{i+1}) – кінцеві точки l_i , а (x_{c_i}, y_{c_i}) – центральна точка дуги. Кожен l_i є відрізком, якщо $r_i = 0$, «опуклою» дугою, якщо $r_i > 0$, «увігнутою» дугою, якщо $r_i < 0$ (мається на увазі, що $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i, y_i)$ для $i = n$). Будемо називати компоненти векторів, що описують елементи l_1, l_2, \dots, l_n , метричними характеристиками розміщеного об'єкту T .

До даного упорядкованого набору відрізків прямих та дуг кіл застосовуємо алгоритм декомпозиції, приведений у [15], щоб отримати набір базових об'єктів, що описують складний об'єкт.

Кожний ϕ -об'єкт T , обмежений відрізками прямих та дугами кіл, може бути декомпозований на n базових об'єктів чотирьох типів [15]. Позначимо клас базових об'єктів як \mathfrak{R} . Кожен базовий об'єкт може бути представлений як перетин декількох примітивів (напів-площина, круг, доповнення до кругу).

Таким чином, представляємо розміщений об'єкт T у наступному вигляді

$$T = \bigcup_{j=1}^n T_j, \text{ де } T_j \in \mathfrak{R}. \quad (1)$$

Кожен розміщений об'єкт може бути описаний у аналітичній формі. Із (1) слідує, що об'єкт T – об'єднання базових об'єктів T_j , $j = 1, \dots, n$. Далі, кожен базовий об'єкт T_j – перетин примітивів T_{jk} , $j = 1, \dots, n$. Тоді $T = \bigcup_{j=1}^n \bigcap_{k=1}^{n_j} T_{jk}$. Визначимо $T_j = \{t \in R^2 : f_j(t) \leq 0\}$, де $f_j(t) = \max_{k=1, \dots, n_j} f_{jk}(t)$,

$j = 1, \dots, n$, $f_{jk}(t)$ – диференційована функція, пов'язана із примітивом T_{jk} . Шукаємо максимум $f_{jk}(t)$, $k = 1, \dots, n_j$, тому що об'єкт T_j визначається перетином примітивів. Таким чином, якщо $\max_{k=1, \dots, n_j} f_{jk}(t) \leq 0$, тоді $f_{jk}(t) \leq 0$ для всіх $k = 1, \dots, n_j$. Так як T – об'єднання простих об'єктів T_j ,

то шукаємо $\min_{j=1, \dots, n} f_j(t)$. Тож кожен розміщений об'єкт може бути представлений у вигляді

$$T = \{t \in R^2 : \min_{j=1, \dots, n} f_j(t) \leq 0\} \text{ або } T = \{t \in R^2 : \min_{j=1, \dots, n} \max_{k=1, \dots, n_j} f_{jk} \leq 0\}.$$

Місце знаходження та орієнтація у просторі розміщеного об'єкта T визначаються вектором його змінних параметрів (x_T, y_T, θ_T) . Трансляція об'єкта T за вектором $v_T = (x_T, y_T) \in R^2$ і поворот (відносно початку системи координат об'єкта) на кут $\theta_T \in [0, 2\pi)$ визначаються як $T(x_T, y_T, \theta_T) = \{t \in R^2 : t = v_T + M(\theta_T)\tilde{t}, \forall \tilde{t} \in T(0, 0, 0)\}$, де $T(0, 0, 0)$ позначається як об'єкт T , з яким не здійснювалося трансляцій та поворотів, а $M(\theta_T)$ – стандартна матриця повороту

$$M(\theta_T) = \begin{pmatrix} \cos \theta_T & \sin \theta_T \\ -\sin \theta_T & \cos \theta_T \end{pmatrix}.$$

Вважаємо, що розміщені об'єкти мають фіксовані метричні характеристики та змінні параметри розміщення (x_T, y_T, θ_T) .

Обмежуюча область Ω – опуклий багатокутник, де кожна сторона $e_i = [v_i, v_{i+1}]$, $i = 1, \dots, m$ має змінну довжину t_i та визначається двома змінними вершинами $v_i = (x_i, y_i)$ і $v_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$, $x_{i+1} = x_i + t_i \cdot \cos \theta_i$, $y_{i+1} = y_i + t_i \cdot \sin \theta_i$. Тобто, кожна сторона e_i може бути задана змінним вектором $(x_i, y_i, \theta_i, t_i)$.

Обмежуюча область Ω має фіксовані параметри розміщення і змінні метричні характеристики p , описані вище. У подальшому ми позначатимемо обмежуючу багатокутну область $\Omega = \Omega(p)$.

Аналітичний опис взаємодії між об'єктами. Однією із успішних ідей у випадку математичного моделювання умов неперетину та включення для об'єктів складної форми, що дозволяють неперервні обертання та трансляції, є метод ϕ -функцій [14]. Використання цього методу призводить до оптимізаційну задачу розміщення, узагалі, до багатоекстремальної задачі нелінійної оптимізації.

Для того, щоб знайти допустиме розміщення об'єктів усередині області Ω , необхідно мати деяке аналітичне представлення взаємодії між парою об'єктів A і B . Для цього використаємо метод ϕ -функцій. ϕ -функції дозволяють розрізнити наступні три випадки: A і B перетинаються, тобто мають спільні внутрішні точки, A і B не перетинаються, тобто не мають спільних точок, A і B доторкаються один до одного, тобто мають спільні точки тільки на границі.

Визначення 2 [14]. ϕ -функцією двох об'єктів A і B називається всюди визначена неперервна функція, яка відповідає наступним вимогам:

- а) $\Phi_{AB} > 0$, якщо $A \cap B = \emptyset$, б) $\Phi_{AB} = 0$, якщо $\text{int } A \cap \text{int } B = \emptyset$ і $\text{fr } A \cap \text{fr } B \neq \emptyset$,
- в) $\Phi_{AB} < 0$, якщо $\text{int } A \cap \text{int } B \neq \emptyset$,

де $\text{int } A$, $\text{fr } A$ – внутрішність і границя об'єкту A , відповідно.

Використаємо ϕ -функції для опису відношення $A \subseteq B$ приналежності одного об'єкта іншому, наступним чином: $\Phi_{AB^*} \geq 0$, де $B^* = R^2 \setminus \text{int } B$. У роботах [14, 15] наведено більш детальний опис властивостей ϕ -функцій.

Згідно з формулою (1), нехай

$$A = \bigcup_{i=1}^{n_A} A_i, B = \bigcup_{j=1}^{n_B} B_j \text{ і } A_i, B_j \in \mathfrak{R}. \quad (2)$$

ϕ -функція, яка описує умову неперетину пари об'єктів A і B довільної форми має вигляд

$$\Phi_{AB} = \min\{\Phi_{ij}, i = 1, 2, \dots, n_A, j = 1, 2, \dots, n_B\}, \quad (3)$$

де Φ_{ij} позначає ϕ -функцію для пари базових об'єктів $A_i, B_j \in \mathfrak{R}$ (або базову ϕ -функцію). Повний список базових ϕ -функцій приводиться у джерелі [16].

Таким чином, у термінах ϕ -функцій, можемо сформулювати умови включення (належності об'єкта контейнеру) наступним чином.

Об'єкт A належить контейнеру Ω , якщо $\Phi_{\Omega^* A} \geq 0$, де $\Omega^* = R^2 \setminus \text{int} \Omega$, Ω є контейнером, що має форму опуклого багатокутника.

Можливо враховувати обмеження на мінімальні відстані, замінивши ϕ -функції на псевдонормалізовані ϕ -функції.

Визначення 3. Псевдонормалізованою ϕ -функцією об'єктів A і B називають всюди визначену неперервну функцію $\hat{\Phi}^{AB}$, яка відповідає наступним вимогам:

а) $\hat{\Phi}^{AB} > 0$, якщо $\text{dist}(A, B) > \rho$, б) $\hat{\Phi}^{AB} = 0$, якщо $\text{dist}(A, B) = \rho$, в) $\hat{\Phi}^{AB} < 0$, якщо $\text{dist}(A, B) < \rho$, де ρ – мінімальна допустима відстань між об'єктами A та B .

Тут мається на увазі $\text{dist}(A, B) = \min_{a \in A, b \in B} d(a, b)$ і $d(a, b)$ – евклідова відстань між двома точками a і b у R^2 . Зокрема, $\text{dist}(A, B) \geq \rho \Leftrightarrow \hat{\Phi}^{AB} \geq 0$.

Математична модель. Сформулюємо задачу оптимального розміщення (або кластеризації) пари складених об'єктів в опуклої багатогранній області мінімального розміру у вигляді наступної задачі умовної оптимізації:

$$\kappa(u^*) = \min \kappa(u), \quad \text{s.t. } u \in W \quad (4)$$

$$W = \{u \in R^\sigma : \hat{\Phi}^{\Omega^* A} \geq 0, \hat{\Phi}^{\Omega^* B} \geq 0, \hat{\Phi}^{AB} \geq 0, \omega \geq 0\}, \quad (5)$$

де $\kappa(u)$ – функція цілі (площа або периметр опуклої оболонки), $u = (p, u_A, u_B) \in R^\sigma$ – вектор змінних, R^σ – σ -вимірний евклідовий простір, p – вектор змінних параметрів багатокутника Ω , $(u_A, u_B) = (x_A, y_A, \theta_A, x_B, y_B, \theta_B)$ – вектор змінних параметрів розміщення об'єктів A і B , W – множина допустимих розв'язків (простір розв'язків), $\hat{\Phi}^{AB}$ – псевдонормалізована ϕ -функція для об'єктів A і B , яка враховує мінімальну допустиму відстань між об'єктами, $\hat{\Phi}^{\Omega^* A}$, $\hat{\Phi}^{\Omega^* B}$ – псевдонормалізовані функції для пар об'єктів A і Ω^* , B і Ω^* – відповідно, які враховують мінімальну допустиму відстань між кожним об'єктом та границею області, $\omega \geq 0$ – додаткова система обмежень на параметри p .

Слід зазначити, якщо $\rho = 0$, то використовуємо в (5) звичайні ϕ -функції замість псевдонормалізованих.

Розглядаємо два варіанти постановки задачі (4), (5), в залежності від вигляду цільової функції $\kappa(u)$.

Задача 1. $\kappa_1(u) = \sum_{i=1}^m t_i$ (периметр багатокутника Ω)

$$u = (x_1, y_1, \theta_1, t_1, \dots, x_m, y_m, \theta_m, t_m, u_A, u_B) \in R^\sigma,$$

$$\sigma = 4m + 6 \text{ (} A \text{ і } B \text{ можуть обертатись)}, \sigma = 4m + 4 \text{ (} A \text{ і } B \text{ не можуть обертатись)},$$

$$\omega \geq 0 \text{ тут: } \{x_{i+1} - x_i - t_i \cdot \cos \theta_i = 0, y_{i+1} - y_i - t_i \cdot \sin \theta_i = 0, (x_i - x_{i+1}) \cdot \cos \theta_i + (y_i - y_{i+1}) \cdot \sin \theta_i \geq 0,$$

$$\text{s.t. } m+1 \equiv 1, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^m t_i > 0.$$

Задача 2. $\kappa_2(u) = 0.5 \sum_{i=1}^m (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$ s.t. $m+1 \equiv 1$, (площа багатокутника Ω)

$u = (x_1, y_1, \theta_1, t_1, \dots, x_m, y_m, \theta_m, t_m, u_A, u_B) \in R^\sigma$, $\sigma = 4m+6$ (A і B можуть обертатись), $\sigma = 4m+4$ (A і B не можуть обертатись), $\omega \geq 0$ тут: $\{x_{i+1} - x_i - t_i \cdot \cos \theta_i = 0, y_{i+1} - y_i - t_i \cdot \sin \theta_i = 0, (x_i - x_{i+1}) \cdot \cos \theta_i + (y_i - y_{i+1}) \cdot \sin \theta_i \geq 0, \text{ s.t. } m+1 \equiv 1, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^m t_i > 0.$

На змінні параметри можна накладати додаткові обмеження. Наприклад, щоб зробити константою якусь змінну із вектора $u = (p, u_A, u_B)$, або задати допустимі границі повороту об'єктів θ_A, θ_B .

Значимо, що $W \neq \emptyset$, тому що κ обмежена знизу, тож задача (4), (5) має розв'язок. Цільова функція є лінійною (κ_1) або квадратичною (κ_2). Phi-функції у (5) побудовані суперпозиції *min* та *max* лінійних і\або нелінійних функцій, включаючи тригонометричні функції *sin* та *cos*. Система $\omega \geq 0$ включає у себе лінійні і\або нелінійні функції. Множина W допустимих розв'язків є не опуклою, що призводить до багатоекстремальності. Отже задача оптимальної кластеризації (4), (5) є задачею негладкої оптимізації.

Загальна стратегія розв'язку. Задача (4), (5) належить до класу задач негладкої нелінійної оптимізації і не може бути вирішена безпосереднім чином. Опишемо підхід до побудови дерева розв'язків, яке визначає допустиму область у вигляді об'єднання множини підобластей і стратегію знаходження локальних та глобальних оптимумів на сукупності таких підобластей.

Оскільки $W = \bigcup_{s=1}^{\eta} W_s$ [14], можемо звести розв'язання задачі негладкої оптимізації (4), (5)

до розв'язання послідовності наступних задач для $u = (p, u_A, u_B)$:

$$\kappa(u^*) = \min\{\kappa(u^{s*}), s = 1, \dots, \eta\}, \quad (6)$$

де

$$\kappa(u^{s*}) = \min \kappa(u) \text{ s.t. } u \in W_s. \quad (7)$$

Глобальний оптимум $\kappa(u^*)$ може бути отриманий шляхом знаходження і порівняння точного розв'язку усіх підзадач (7).

Підзадачі (7), у загальному випадку, представляють собою нелінійні задачі математичного програмування і можуть бути вирішені стандартними методами локальної оптимізації (такими як метод внутрішньої точки, метод допустимих напрямків) або NLP-solvers (такими як IPOPT, Baron).

Дерево рішень. Розглянемо phi-функції Φ_{AB} , $\Phi_{A\Omega^*}$ і $\Phi_{B\Omega^*}$, які беруть участь у формуванні

області W задачі (4), (5). Тут A і B – складені об'єкти, задані як $A = \bigcup_{t=1}^{n_A} A_t$, $B = \bigcup_{l=1}^{n_B} B_l$, $A_t, B_l \in \mathfrak{R}$,

у відповідності до (2).

Нехай $\Phi_k \in \{\Phi_{A_t B_l}, \Phi_{A_t \Omega^*}, \Phi_{B_l \Omega^*}\}$ – базова phi-функція, $k = 1, 2, \dots, n$, де $n = n_A \cdot n_B + n_A + n_B$, $t = 1, 2, \dots, n_A$, $l = 1, 2, \dots, n_B$, $n_A \cdot n_B$ – число базових phi-функцій $\Phi_{A_t B_l}$ у phi-функції Φ_{AB} , $n_A + n_B$ – число базових phi-функцій $\Phi_{A_t \Omega^*}$ і $\Phi_{B_l \Omega^*}$ у phi-функціях $\Phi_{A\Omega^*}$ і $\Phi_{B\Omega^*}$.

Як вказано в [17], кожна ρ -функція може бути представлена у вигляді:

$$\Phi_k = \max_{i=1, \dots, \eta_k} f_i^k = \max_{i=1, \dots, \eta_k} \min_{j=1, \dots, J_i^k} f_{ij}^k,$$

де f_{ij}^k – диференційовані функції. Оскільки $\min_{j=1, \dots, J_i^k} f_{ij}^k \geq 0$ еквівалентно до $f_{ij}^k \geq 0$ для всіх j ,

і $\max_{i=1, \dots, \eta_k} f_i^k \geq 0$ означає, що, хоча б одна із нерівностей, скажімо $f_{i_0}^k \geq 0$, повинна бути виконаною.

Для кожної нерівності $\Phi_k \geq 0$ можемо побудувати дерево, яке називається базовим ρ -деревом і позначається \mathfrak{Z}_k і η_k відповідає кількості кінцевих вузлів базового ρ -дерева. Кожний кінцевий вузол дерева \mathfrak{Z}_k відповідає системі нерівностей $f_i^k \geq 0, i = 1, 2, \dots, \eta_k$.

Дерево рішень \mathfrak{Z} описує допустиму область W задачі (4), (5) і будується наступним чином.

Кореню дерева відповідає система нерівностей $\omega \geq 0$.

На першому рівні ρ -дерева \mathfrak{Z} містить $\tau_1 = \eta_1$ вузлів, де η_1 – це кількість кінцевих вузлів базового ρ -дерева \mathfrak{Z}_1 , яке описує $\Phi_1 \geq 0, \Phi_1 = \max_{i=1, \dots, \eta_1} f_i^1, f_i^1 = \min_{j=1, \dots, J_i^1} f_{ij}^1$. Тут кожному вузлу відповідає система нерівностей $\{\omega \geq 0, f_{i_1}^1 \geq 0\}$.

На другому рівні ρ -дерева \mathfrak{Z} до кожного вузла на першому рівні додаємо η_2 вузлів базового ρ -дерева \mathfrak{Z}_2 , яке описує $\Phi_2 \geq 0$, де $\Phi_2 = \max_{i=1, \dots, \eta_1} f_i^2, f_i^2 = \min_{j=1, \dots, J_i^2} f_{ij}^2$, тобто кількість вузлів на другому рівні \mathfrak{Z} стає $\tau_2 = \eta_1 \cdot \eta_2$. Тут кожному вузлу відповідає система нерівностей вигляду $\{\omega \geq 0, f_{i_1}^1 \geq 0, f_{i_2}^2 \geq 0\}$.

На k -му рівні ρ -дерева \mathfrak{Z} до кожного вузла на $(k-1)$ -му рівні додаємо η_k вузлів базового ρ -дерева \mathfrak{Z}_k , яке описує $\Phi_k \geq 0$, де $\Phi_k = \max_{i=1, \dots, \eta_k} f_i^k, f_i^k = \min_{j=1, \dots, J_i^k} f_{ij}^k$, тобто кількість вузлів на k -му рівні \mathfrak{Z} стає $\tau_k = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_k$. Тут кожному вузлу відповідає система нерівностей вигляду $\{\omega \geq 0, f_{i_1}^1 \geq 0, f_{i_2}^2 \geq 0, \dots, f_{i_k}^k \geq 0\}$.

Слід зазначити, що $\tau_n = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_{n-1} \cdot \eta_n = \eta$, де η – кількість вузлів дерева рішень \mathfrak{Z} .

Представимо область W допустимих розв'язків задачі (4), (5), як об'єднання підобластей $W_s, s = 1, 2, \dots, \eta$. Кожна W_s відповідає s -му кінцевому вузлу дерева \mathfrak{Z} і, таким чином, W_s визначається системою нерівностей вигляду $\{\omega \geq 0, f_{s_k}^k \geq 0, k = 1, \dots, n\}$.

Зростання кількості кінцевих вузлів дерева рішень показує, що дана задача оптимальної кластеризації є NP-складною.

Алгоритми розв'язку. Для розв'язання задач оптимальної кластеризації (4), (5) пропонується два алгоритми. Перший полягає у послідовному пошуку локальних екстремумів на усіх допустимих підобластях і дає у результаті глобальний екстремум, за умови, що кожна підзадача (7) може бути розв'язана оптимально. Другий алгоритм є значно швидшим і здійснює пошук локально-оптимального екстремуму тільки з однієї «перспективної» стартової точки.

Алгоритм 1. Цей алгоритм базується на побудові дерева рішень, описаній вище і генерує системи нерівностей, які описують підобласті $W_s \subset W$ із (7), використовуючи дерево рішень \mathfrak{T} . Алгоритм 1 застосовує прискорений пошук систем нерівностей, що відповідають вузлам $v_{s_k}^k$, $s_k = 1, \dots, \eta_k$, $k = 1, \dots, n$ дерева \mathfrak{T} . Для того, щоб відкинути «неперспективні» вузли на k -му рівні дерева \mathfrak{T} , застосовуємо правила відсічення. Ці правила використовують несумісність отриманих систем нерівностей із верхніми обмеженнями цільової функції.

На останньому рівні дерева \mathfrak{T} розв'язуємо задачу оптимізації, що відповідає вузлу $v_{s_n}^n$

$$\kappa(u_{s_n}^{n*}) = \min\{\kappa(u) : u \in W_s = V_{s_n}^n\}, \quad V_{s_n}^n = \{u \in R^\sigma : f_{s_1}^1 \geq 0, f_{s_2}^2 \geq 0, \dots, f_{s_n}^n \geq 0, \omega \geq 0\}.$$

Якщо $V_{s_n}^n \neq \emptyset$ і $\kappa(u_{s_n}^{n*}) < \kappa^0$, тоді задаємо $\kappa^0 = \kappa(u_{s_n}^{n*})$ і приймаємо точку $u_{s_n}^{n*}$, як найкращий розв'язок.

Складність алгоритму 1 залежить від числа $\hat{\eta} \leq \eta$ нелінійних задач оптимізації, які повинні бути розв'язані і складності обраного методу нелінійної оптимізації, ($O(\eta)$). Алгоритм 1 може бути застосовано до «простих» об'єктів, так як число кінцевих вузлів дерева \mathfrak{T} зростає дуже швидко із числами n_A і n_B базових об'єктів, з яких складаються A і B .

Алгоритм 2. Цей алгоритм знаходить хороший розв'язок, маючи при цьому прийнятний час обчислень, який не зростає значно із збільшенням складності об'єктів. Для того, щоб отримати хороший допустимий розв'язок $u^0 \in W$, алгоритм використовує швидкий евристичний метод, приведений у [14, 17]. Далі алгоритм застосовує ПРОРТ [18] для знаходження локального мінімуму задачі для кожної стартової точки. Опис цього алгоритму представлено далі.

Визначимо функцію $\Lambda(u) = \min\{\Phi_{AB}, \Phi_{\Omega^*A}, \Phi_{\Omega^*B}, \omega\}$. Ціль алгоритму – виділити із $\Lambda(u^0) \geq 0$ систему нерівностей, яка описує підобласть $W_s \subset W$ таку, що $u^0 \in W_s$.

Формуємо підобласть W_s наступним чином. Виконуємо пошук вузлів $v_s^1, s = 1, \dots, \eta_1$ першого рівня \mathfrak{T} послідовно і шукаємо номер s_1 такий, щоб

$$f_{s_1}^1(u^0) = f^1(u^0) = \max\{f_1^1(u^0), f_2^1(u^0), \dots, f_{\eta_1}^1(u^0)\}.$$

Потім виконуємо пошук дочірніх вузлів $v_s^2, s = 1, \dots, \eta_2$ вузла $v_{s_1}^1$ послідовно і шукаємо номер s_2 такий, щоб $f_{s_2}^2(u^0) = f^2(u^0) = \max\{f_1^2(u^0), f_2^2(u^0), \dots, f_{\eta_2}^2(u^0)\}$.

На n -му рівні дерева рішень \mathfrak{T} виконуємо пошук дочірніх вузлів $v_s^n, s = 1, \dots, \eta_n$ вузла $v_{s_{n-1}}^{n-1}$ послідовно і шукаємо номер s_n такий, щоб $f_{s_n}^n(u^0) = f^n(u^0) = \max\{f_1^n(u^0), f_2^n(u^0), \dots, f_{\eta_n}^n(u^0)\}$. Тоді, формуємо систему нерівностей, яка відповідає s -му кінцевому вузлу дерева \mathfrak{T} у вигляді $W_s = \{u \in R^\sigma : f_{s_1}^1 \geq 0, f_{s_2}^2 \geq 0, \dots, f_{s_n}^n \geq 0, \omega \geq 0\}$. Кожній послідовності чисел $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_n$ відповідає число s , яке описується формулою:

$$s = s_1^* = \begin{cases} s_k^* = (s_k - 1) \cdot \prod_{i=k+1}^n \eta_i + s_{k+1}^*, & \text{if } k = 1, \dots, n-1 \\ s_k^* = s_k, & \text{if } k = n \end{cases}.$$

Далі розв'язуємо задачу $\min_{u \in W_s} k(u)$, стартуючи із точки u^0 .

Складність алгоритму 2 залежить від числа n базових ϕ -функцій, що складають простір розв'язків і складності обраного методу нелінійної оптимізації ($O(n_A \cdot n_B)$).

Отже, наш підхід дає змогу знайти глобальний мінімум задачі (4), (5) для складених об'єктів, використовуючи алгоритм 1, оскільки у цьому випадку кожна задача (7) перетворюється на лінійну задачу і знайти хороше наближення глобального мінімуму у задачах кластеризації, використовуючи алгоритм 1 або алгоритм 2.

Обчислювальні експерименти. Наведено приклади розв'язання задачі 1 та задачі 2 за допомогою розробленого на ґрунті проведених теоретичних розробок програмного комплексу побудови опуклих багатокутних оболонок мінімальної площини і периметру для пари довільних об'єктів.

Приклад 1. Об'єкти задані у спосіб, що описаний у першому розділі, у вигляді

об'єкт A : {115.182702089, -204.598967565, 0.0, 286.156172033, -33.625497622, 0.0, 215.484384787, 37.037804343, 0.0, 179.988331478, 1.488010919, -100.048312734, 109.256014172, 72.245372157, 38.511173909, 1.500531658, -100.048313476, 109.256014172, 72.245372157, 9.843590682, 60.983268381, 0.0, -7.520830543, 214.904151189, 0.0, -106.889839396, 203.694387387, 0.0, -62.729606698, -187.750027183, -99.944086869, -162.035487006, -199.026668367, -91.325712036, -269.659155395, 0.0, -126.568621117, -304.839839080, 0.0, -55.790767854, -375.572437508, 0.0},

об'єкт B : {96.204615870, -171.078974587, 0.0, 249.486981255, -17.796609202, 0.0, 178.750140186, 53.025084682, 0.0, 178.656802090, 52.975587207, -99.991451813, 107.927676864, 123.655720769, 178.631998906, 52.950775537, -99.991321995, 107.927676864, 123.655720769, 37.222915214, 52.950775537, -99.991322629, 107.927676864, 123.655720769, 8.572165371, 112.395184244, 0.0, 2.694693806, 164.217626023, 0.0, -96.668658193, 152.948465251, 0.0, -63.853246692, -136.377002193, -99.939811127, -163.147698454, -147.716212810, -92.399854555, -218.304515182, 0.0, -127.796912915, -253.698745114, 0.0, -57.077042408, -324.360632865, 0.0}.

Локально-оптимальне розміщення складених об'єктів A і B для прикладу 1 наведено на рис. 1. Мінімальний периметр опуклої багатокутної оболонки, отриманий за 0.717 сек., дорівнює 1935.287432. Мінімальна площа опуклої багатокутної оболонки, отриманої за 1.046 сек., дорівнює 480903.019848.

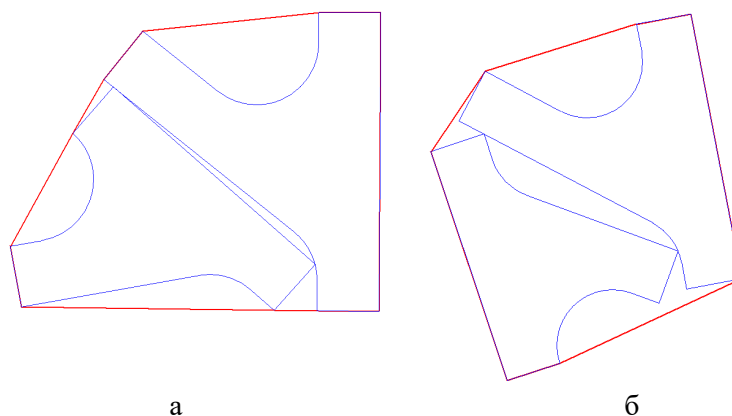


РИС. 1. Мінімальна багатогранна опукла оболонка: а – мінімальної площі, б – мінімального периметру

Приклад 2. Розглядаються два об'єкти, що описані за допомогою списків

об'єкт *A*: {51.468684320, 7.214667833, -5.309998523, 55.424284158, 3.672166705, 60.218684320, 5.954667833, 11.249999735, 65.284886527, 15.999372370, 72.398684320, 24.714667833, 62.809988100, 31.355167592, -22.830303927, 0.528684320, 31.894667833, 6.560005046, 3.958629106, 26.302785773, -2.601315680, 26.274667833, 0.0, -2.601315680, 19.714667833, 0.0, -2.601315680, 12.214667833, 7.288785186, 4.648795476, 11.464816041, 7.398684320, 4.714667833, -5.620000983, 11.164850519, 0.543288779, 15.528684320, 4.084667833, 8.749994118, 23.582012992, 7.506114072, 23.968684320, -1.235332167, 0.0, 35.218684320, -1.235332167, 0.0, 40.218684320, -1.235332167, 9.380010190, 40.390479062, 8.143104682, 46.778684320, 1.274667833, -5.630010326, 51.764902963, -1.339646591, 47.398684320, 2.214667833, 9.379987951, 42.602157727, 10.275530480},

об'єкт *B*: { 38.778048354, 5.574803081, 12.190011326, 38.922193441, 17.763962129, 50.968048354, 15.894803081, -3.749999419, 54.692439191, 16.332305691, 58.158048354, 17.764803081, 8.119995261, 64.789337013, 22.450988496, 65.038048354, 14.334803081, 0.0, 70.658048354, 14.334803081, 0.0, 72.538048354, 14.334803081, 7.499997814, 72.739732315, 21.832088642, 79.408048354, 25.264803081, -9.690008705, 88.274173139, 29.174803081, 79.408048354, 33.084803081, 10.310000546, 69.229602639, 34.726556440, 59.718048354, 38.704803081, -2.500001698, 57.298393041, 39.333513392, 57.218048354, 36.834803081, 0.0, 38.778048354, 36.834803081, 0.0, 20.348048354, 36.834803081, -2.500001698, 20.267703667, 39.333513392, 17.848048354, 38.704803081, 10.310000546, 8.336494068, 34.726556440, -1.841951646, 33.084803081, -9.690008705, -10.708076431, 29.174803081, -1.841951646, 25.264803081, 7.499999549, 4.826223262, 21.831810708, 5.038048354, 14.334803081, 0.0, 6.908048354, 14.334803081, 0.0, 12.538048354, 14.334803081, 8.120009804, 12.776960205, 22.451297419, 19.408048354, 17.764803081, -3.750000599, 22.873655350, 16.332297359, 26.598048354, 15.894803081, 12.189988489, 38.643866050, 17.764053036}.

Локально-оптимальне розміщення складених об'єктів *A* і *B* для прикладу 2 показано на рис. 2. Мінімальна площа опуклої багатокутної оболонки, отриманої за 11.528 сек., дорівнює 10479.396755.

Мінімальний периметр опуклої багатокутної оболонки, отриманий за 6.068 сек., дорівнює 266.648192.

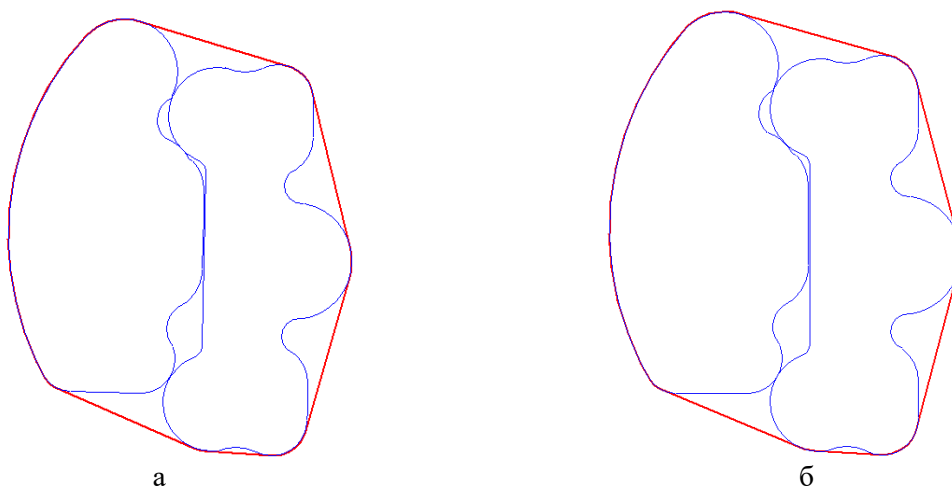


РИС. 2. Мінімальна багатогранна опукла оболонка: а – мінімальної площі, б – мінімального периметру

Результати. Розглянуто нову задачу розміщення пари складених об'єктів у багатогранній області зі змінними вершинами та кількістю сторін. Розроблено стратегію розв'язання задачі, яка ґрунтується на побудові дерева рішень. Запропоновано два алгоритми. Наведено результати числових експериментів та графічні ілюстрації отриманих результатів.

Висновки. Розглянуто задачу побудови опуклої багатокутної оболонки для пари двовимірних об'єктів, що мають довільну просторову форму та дозволяють перетворення неперервних обертань та трансляцій. Для аналітичного опису умов неперетину та включення застосовано метод ρ -функцій. Як функція цілі розглядаються периметр або площа опуклої оболонки. Будується математична модель у вигляді задачі нелінійної оптимізації. Пропонуються два алгоритми розв'язання. Перший алгоритм базується на побудові дерева рішень та полягає у послідовному пошуку локальних екстремумів на усіх допустимих підобластях. Другий алгоритм є значно швидшим і здійснює пошук тільки одного локально-оптимального рішення. Цей алгоритм знаходить хороший розв'язок, маючи при цьому прийнятний час обчислень, який не зростає значно із збільшенням складності об'єктів. Наводяться результати обчислювальних експериментів.

Список літератури

1. Preparata F.P., Shamos M.I. *Computational Geometry: An Introduction*. Springer. 1985. 400 p. doi.org/10.1007/978-1-4612-1098-6
2. Avis D., Bremner D., Seidel R. How good are convex hull algorithms? *Computational Geometry: Theory and Applications*. 1997. **7** (5–6). P. 265–301. [doi.org/10.1016/S0925-7721\(96\)00023-5](https://doi.org/10.1016/S0925-7721(96)00023-5)
3. Cormen T.H., Leiserson C.E., Ronald L. Rivest R.L., Stein C. *Introduction to Algorithms*, Second Edition. Section 33.3: Finding the convex hull. MIT Press and McGraw-Hill. 2001. P. 947–957. ISBN 0-262-03293-7.
4. De Berg M., Cheong O., Van Kreveld M., Overmars M. *Computational Geometry Algorithms and Applications*. Berlin: Springer. 2008. P. 2–14. [doi:10.1007/978-3-540-77974-2](https://doi.org/10.1007/978-3-540-77974-2)
5. Scheithauer G. *Introduction to Cutting and Packing Optimization. Problems, Modeling Approaches. Solution Methods*. Springer. 2018. 410 p. ISBN 978-3-319-64403-5
6. Alt H., de Berg M., Knauer C. Approximating Minimum-Area Rectangular and Convex Containers for Packing Convex Polygons. In: Bansal N., Finocchi I. (eds) *Algorithms*. ESA 2015. *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Berlin, Heidelberg. 2015. **9294**. P. 25–34. doi.org/10.1007/978-3-662-48350-3_3
7. Yagiura M., Umetani S., Imahori S. *Cutting and Packing Problems - From the Perspective of Combinatorial Optimization*. Springer. 2021. 300 p. ISBN 978-4-431-55291-8
8. Tang K., Wang C.C.L., Chen D.Z. Minimum area convex packing of two convex polygons. *International Journal of Computational Geometry & Applications*. 2006. **16** (1). P. 41–74. doi.org/10.1142/S0218195906001926
9. Kallrath J. Cutting Circles and Polygons from Area-Minimizing Rectangles. *Journal of Global Optimization*. 2009. **43**. P. 299–328. doi.org/10.1007/s10898-007-9274-6
10. Ahn H.K., Cheong O. Aligning Two Convex Figures to Minimize Area or Perimeter. *Algorithmica*. 2012. **62**. P. 464–479. doi.org/10.1007/s00453-010-9466-1
11. Park D., Bae S.W., Alt H., Ahn H.K. Bundling three convex polygons to minimize area or perimeter. *Computational Geometry*. 2016. **51**. P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2015.10.003>
12. Kallrath J., Frey M.M. Packing Circles into Perimeter-Minimizing Convex Hulls. *Journal of Global Optimization*. 2019. **73** (4). P. 723–759. doi.org/10.1007/s10898-018-0724-0
13. Kallrath J., Frey M.M. Minimal surface convex hulls of spheres. *Vietnam J. Math.* 2018. **46**. P. 883–913. doi.org/10.1007/s10013-018-0317-8
14. Chernov N., Stoyan Yu, Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. *Computational Geometry*. 2010. **43** (5). P. 535–553. doi.org/10.1016/j.comgeo.2009.12.003

15. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Placement Problems for Irregular Objects: Mathematical Modeling, Optimization and Applications. In: Butenko S., Pardalos P., Shylo V. (eds) *Optimization Methods and Applications. Springer Optimization and Its Applications*. 2017. **130**. P. 521–559. Springer, Cham.
doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_25
16. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A. Phi-functions for 2D objects formed by line segments and circular arcs. *Advances in Operations Research*. 2012. doi.org/10.1155/2012/346358
17. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Cutting and Packing problems for irregular objects with continuous rotations: mathematical modeling and nonlinear optimization. *J. Oper. Res. Soc.* 2016. **67** (5). P. 786–800.
<https://doi.org/10.1057/jors.2015.94>
18. Wächter A., Biegler L.T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*. 2006. **106** (1). P. 25–57. doi.org/10.1007/s10107-004-0559-y

Одержано 09.06.2021

Дубинський Володимир Максимович,

аспірант Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків,

Панкратов Олександр Вікторович,доктор технічних наук, провідний науковий співробітник
Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків,
<https://orcid.org/0000-0002-2958-8923>**Романова Тетяна Євгенівна,**доктор технічних наук, провідний науковий співробітник
Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків,
<https://orcid.org/0000-0002-8618-4917>
tarom27@yahoo.com**Лисенко Богдан Сергійович,**

студент Харківського національного інституту радіоелектроніки, Харків,

Каяфюк Родіон Віталійович,

студент Харківського національного інституту радіоелектроніки, Харків,

Жмуд Олександр Олексійович,

аспірант Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.

UDC 519.85

V.M. Dubynskiy¹, O.V. Pankratov¹, T.E. Romanova^{1*}, B.S. Lysenko², R.V. Kayafyuk², O.O. Zhmud³**Convex Polygonal Hull for a Pair of Irregular Objects**¹ A.M. Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the NAS of Ukraine, Kharkiv² Kharkiv National University of Radio Electronics, Ukraine³ V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv* Correspondence: tarom27@yahoo.com

Introduction. Optimization placement problems are NP-hard. In most cases related to cutting and packing problems, heuristic approaches are used. The development of analytical methods for mathematical modeling of the problems is of paramount important for expanding the class of placement problems that can be solved optimally using state of the art NLP-solvers.

The problem of placing two irregular two-dimensional objects in a convex polygonal region of the minimum size, which is a convex polygonal hull of the minimum area or perimeter, is considered. Continuous rotations and translations of non-overlapping objects are allowed.

To solve the problem of optimal compaction of a pair of objects, two algorithms are proposed. The first is a sequentially search for local extrema on all feasible subdomains using a solution tree. The second algorithm searches for a locally optimal extremum on a single subdomain using a "good" feasible starting point.

Purpose of the paper. Show how to construct a minimal convex polygonal hull for two continuously moving irregular objects bounded by circular arcs and line segments.

Results. A mathematical model is constructed in the form of a nonlinear programming problem using the phi-function technique. Two algorithms are proposed for solving the problem of placing a pair of objects in order to minimize the area and perimeter of the enclosing polygonal area. The results of computational experiments are presented.

Conclusions. The construction of a minimal convex polygonal hull for a pair of two-dimensional objects having an arbitrary spatial shape and allowing continuous rotations and translations makes it possible to speed up the process of finding feasible solutions for the problem of placing a large number of objects with complex geometry.

Keywords: convex polygonal hull, irregular objects, phi-function technique, nonlinear optimization.