КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.272.2
DOI:10.34229/2707-451X.21.2.6

М.А. ГУПАЛ

МЕТОДИ НУМЕРАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

На основі нумерацій скінченних дискретних послідовностей побудовано нумерації для чотирьох команд машини з необмеженими регістрами (МНР). За допомогою цих біекцій визначено нумерації для усіх програм МНР.

Ключові слова: *нумерація, геделев кодовий номер, діагональний метод.*

Вступ. Нумерація, або кодування, дискретних послідовностей відіграють фундаментальну роль у теорії розпізнавання та обчислюваності. За допомогою кодування отримують коди або індекси програм та обчислюваних функцій. Встановлено, що існують універсальні програми, тобто програми, які реалізують усі інші програми. Це один з основних результатів
у теорії обчислюваності. На основі нумерації дискретних послідовностей Гедель довів теорему про неповноту арифметики.

Теорема 1. Наступні множини являються ефективно зчисленними:

(a) $N \times N$,

(b) $N^{\div} \times N^{\div} \times N^{+}$,

(c) $\bigcup_{k>0} N^k$, множина усіх скінчених послідовностей натуральних чисел.

Доведення.

(a). Бієкція $\alpha: N \times N \to N$ визначається рівністю: $\alpha(m,n) = 2^m(2n+1)-1$. Очевидно, що функція α обчислювана. Ефективна обчисленність зворотної функції витікає з того, що α^{-1} можна задати таким чином:

$$\alpha^{-1}(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x)),$$

де α_1, α_2 – обчислені функції, які визначаються на основі рівностей $\alpha_1(x) = (x+1)_1$, $\alpha_2(x) = 1/2((x+1)/(2^{\alpha_1(x)}-1))$. $(x)_y$ = показник p_y у розкладенні x на прості множники для $x, y > 0$, $p_0 = 0$, $p_1 = 2, p_2 = 3$ тощо.

(b). Для явного задання бієкції ξ:
$N^{\div} \times N^{\div} \times N^{+} \to N$ використовуємо функцію α з (a):

$$\xi(m,n,q) = \alpha(\alpha(m-1, n-1), q-1).$$

Тоді $\xi^{-1}(x) = (\alpha_1(\alpha_1(x))+1, \alpha_2(\alpha_1(x))+1, \alpha_2(x)+1)$. Оскільки функції α, α_1, α_2 ефективно обчислені, то і функції ξ та ξ^{-1} – також ефективно обчислені.

(c). Бієкція $\beta: \bigcup_{k>0} N^k \to N$ задається тотожністю

$$\beta(a_1, \ldots, a_k) = 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + \ldots$$
$$\ldots + 2^{a_1+a_2+a_3+2} + \ldots + 2^{a_1+a_2+\ldots+a_k+k-1} - 1.$$

Очевидно, що функція β ефективно обчислена. Для установлення бієктивності β та обчисленності $\beta^{-1}(x)$ використовуємо факт того, що у кожного натурального числа є рівно одне представлення у двійковій позиційній системі. Таким чином, для даного x можна ефективно та єдиним чином вказати числа $k \geq 1$, та $0 \leq b_1 < b_2 < ... < b_k$, такі, що $x + 1 = 2^{b_1} + 2^{b_2} + ... + 2^{b_k}$, тоді отримуємо $\beta^{-1}(x) = (a_1, ..., a_k)$, де $a_1 = b_1$, $a_{i+1} = b_{i+1} - b_i - 1$, $(1 \leq i < k)$.

Нумерація програм. В роботі [1] було обрано ідеалізований комп'ютер – машина з необмеженими регістрами (МНР). МНР містить необмежене число регістрів $R_1, R_2, R_3, ...,$ кожний з яких у будь-який момент часу містить певне натуральне число r_n. МНР може змінити вміст регістрів на відповідь деякої команди. Скінчений список команд утворює програму. Існує чотири види команд.

Команди обнуління. Для кожного $n = 1, 2, 3, ...$ має місце команда обнулення $Z(n)$. Команда $Z(n)$ примушує МНР замінити вміст R_n на 0, не торкаючи інші регістри.

Команди додавання одиниці. Для кожного $n = 1, 2, 3, ...$ існують команди $S(n)$. Під впливом команди $S(n)$ МНР збільшує вміст регістра R_n на 1, залишаючи без змін вміст інших регістрів.

Команди переадресації. Для кожного $m = 1, 2, 3, ...$ та $n = 1, 2, 3, ...$ існують команди переадресації $T(m, n)$. Команда $T(m, n)$ замінює вміст R_n числом r_m, яке знаходиться в R_m, інші регістри залишаються без змін.

Команди умовного переходу. Для усіх $m = 1, 2, 3, ...,$ $n = 1, 2, 3, ...$ та $q = 1, 2, 3, ...$ існують команди $J(m, n, q)$. Припустимо, що ця команда зустрілась у програмі P. Порівнюємо вміст регістрів R_m та R_n. Далі, якщо $r_m = r_n$, то МНР переходить до виконання q-ї команди програми P, якщо $r_m \neq r_n$, то МНР переходить до виконання наступної команди програми P. Якщо умовний перехід неможливий завдяки того, що в P менше ніж q команд, то МНР припиняє роботу.

Позначимо множину усіх команд МНР $K,$ а множину усіх програм Π. Кожна програма складається з скінченого списку команд.

Теорема 2. Множина K ефективно зчисленна.

Доведення. Визначимо бієкцію $\lambda: K \to N$, яка відображає команди чотирьох типів у натуральні числа виду $4u$, $4u + 1$, $4u + 2$, $4u + 3$ відповідно. Використовуємо функції α та ξ, які визначено при доведенні теореми 1.

$$\lambda(Z(n) = 4(n - 1), \ \lambda(S(n) = 4(n - 1) + 1,$$
$$\lambda(T(m, n) = 4\alpha(m - 1, n - 1) + 2,$$
$$\lambda(J(m, n, q) = 4\xi(m, n, q) + 3.$$

Таке визначення показує ефективну обчисленність функції λ. Для обчислення $\lambda^{-1}(x)$ знаходять спочатку такі числа u та r, що $x = 4u + r$ для $0 \leq r < 4$. Значення r вказує тип команди $\lambda^{-1}(x)$, а u дозволяє знайти конкретну команду даного типа, а саме:

якщо $r = 0$, то $\lambda^{-1}(x) = Z(u + 1)$,

якщо $r = 1$, то $\lambda^{-1}(x) = S(u + 1)$,

якщо $r = 2$, то $\lambda^{-1}(x) = T(\alpha_1(u) + 1), \alpha_2(u) + 1)$,

якщо $r = 3$, то $\lambda^{-1}(x) = J(m, n, q)$, де $(m, n, q) = \xi^{-1}(u)$.

Отже, функція $\lambda^{-1}(x)$ ефективно зчисленна.

Теорема 3. Множина Π ефективно зчисленна.

Доведення. Визначимо бієкцію $\gamma : \Pi \to N$ наступним чином на основі бієкцій α та λ теорем 1 та 2: якщо $P = I_1, I_2, ..., I_s$, то $\gamma(P) = \beta(\lambda(I_1), ..., \lambda(I_s))$. Оскільки α та λ – бієкції, то і γ є бієкцією, а ефективна обчисленність функцій α, λ та обернених до них забезпечує ефективну обчисленність γ та γ^{-1}.

Бієкція γ відіграє важливу роль у теорії рекурсивних функцій. Число $\gamma(P)$ називається кодовим номером, або геделевим номером програми P. Вважаємо, що P_n = програма з кодовим номером $n = \gamma^{-1}(n)$. Завдяки побудові γ нерівність $m \neq n$ спричиняє відмінність програм P_m та P_n, хоча вони можуть обчислювати одну і ту ж функцію. Важливо, що функції γ та γ^{-1} ефективно обчислені, тобто:

(a). По даній програмі P можна ефективно знайти її кодовий номер $\gamma(P)$.

(b). По даному номеру n можна ефективно знайти програму $P_n = \gamma^{-1}(n)$.

Нумерація обчислених функцій. На основі нумерації програм можна перенумеровувати обчислені функції а також області визначення і множину значень. Нехай f часткова функція $N^n \to N$. Припустимо, що P – програма, а $a_1, ..., a_n, b \in N$. Обчислення $P(a_{1,}, a_2, ..., a_n)$ збігається до b, якщо $P(a_{1,}, a_2, ..., a_n) \downarrow$ та в заключній конфігурації у регістрі R_1 знаходиться b. Цей факт зазначається як $P(a_{1,}, a_2, ..., a_n) \downarrow b$. Програма P МНР-обчислює f, якщо для усіх $a_1, ..., a_n, b$ має місце $P(a_1, a_2, ..., a_n) \downarrow b$ тоді і тільки тоді, коли $a_1, ..., a_n, b \in Domf$ та $f(a_{1,}, a_2, ..., a_n) = b$. Функція f – МНР-обчислена, якщо існує програма, яка МНР обчислює f.

Клас МНР-обчислених функцій визначається через ϕ, а клас n-місних МНР-обчислених функцій – через ϕ_n.

Для кожної програми P результатом застосування програми P до начальної конфігурації виду $a_{1,}, a_2, ..., a_n, 0, ...$ є єдина n-місна функція, яка обчислюється програмою P і визначається як $f_P^{(n)}$. Це визначення означає, що $f_P^{(n)}(a_1, ..., a_n)$ – єдине b, таке, що $P(a_{1,}, a_2, ..., a_n) \downarrow b$, якщо $P(a_{1,}, a_2, ..., a_n) \downarrow$, не визначена, якщо $P(a_{1,}, a_2, ..., a_n) \uparrow$.

Для кожного $a \in N$, $n \geq 1$ позначимо $\varphi_a^{(n)} = n$-місна функція, яка обчислюється програмою $P_a = f_{P_a}^{(n)}$. Нехай f – одномісна обчислена функція. Тоді повинна знайтись програма P, така, що $f = \varphi_a$, де $a = \gamma(P)$. Оскільки для кожної функції існує багато різних обчислених програм, у дійсності в кожної функції є нескінченно багато індексів. Аналогічно теоремам 1 – 3 множини функцій ϕ та ϕ_n зчисленні.

Наступна теорема показує, що існують необчислені функції. Ідея доведення спирається на відомий діагональний метод Кантора [2].

Теорема 4. Існує необчислена всюди визначена (або тотальна) функція.

Доведення. Знаходять тотальну функцію f, яка одночасно відрізняється від кожної функції у переліченні $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ класу ϕ_1. Покладемо $f(n) = (\varphi_n(n) + 1$, якщо значення $\varphi_n(n)$ визначено, 0, якщо значення $\varphi_n(n)$ не визначено. Таким чином, для кожного n функція f відрізняється від φ_n у точці n: якщо $\varphi_n(n)$ визначено, то f відрізняється від φ_n тим, що $f(n) \neq \varphi_n(n)$, якщо $\varphi_n(n)$ не визначено, то f відрізняється від φ_n тим, що $f(n)$ визначено.

Оскільки f відрізняється від кожної одномісної функції φ_n, то f не представлена у переліченні класу ϕ_1 і, таким чином, не є обчисленою. Очевидно, що f – тотальна функція.

Метод побудови функції f у теоремі 4 – приклад діагональної конструкції Кантора. Ця ідея є центральною у доведенні багатьох результатів, які належать до обчисленності та розв’язуваності.

Наведемо теорему, яка має багато важливих застосувань [2]. Нехай $f(x, y)$ – обчислена функція. Тоді для кожного фіксованого значення a змінної x функція f – одномісна функція g_a, де $g_a(y) = f(a, y)$. Оскільки g_a обчислена, то вона має індекс e, $f(a, y) = \varphi_e(y)$. Наступна s, m, n-теорема Кліні показує, що індекс e можна знайти за значенням a.

Теорема 5. *s-m-n* – теорема. Припустимо, що $f(x, y)$ – обчислена функція. Існує тотальна обчислена функція $k(x)$, така, що $f(x, y) = \varphi_{k(x)}(y)$.

Висновки. На основі нумерацій скінченних дискретних послідовностей побудовано нумерації для чотирьох команд МНР в натуральні числа виду 4*u*, 4*u* + 1, 4*u* + 2, 4*u* + 3 відповідно. Кожна програма складається з скінченого списку команд. На основі бієкцій для чотирьох команд МНР визначено взаємно однозначні нумерації для усіх програм МНР.

Список літератури

1. Shepherdson J.C., Sturgis H.E. Computability of recursive functions. *J. Assoc. Comput. Machinery*. 1963. **10** (2). P. 217–255. https://doi.org/10.1145/321160.321170
2. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972. 624 с.

Одержано 06.05.2021

Гупал Микита Анатолійович,
кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
nikita_gupal@yahoo.com

UDC 519.272.2

N.A. Gupal

Methods of Numeration of Discrete Sequences

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
Correspondence: nikita_gupal@yahoo.com

Introduction. Numeration, or code, discrete sequences act fundamental part in the theory of recognition and estimation. By the code get codes or indexes of the programs and calculated functions. It is set that the universal programs are that programs which will realize all other programs. This one of basic results in the theory of estimation. On the basis of numeration of discrete sequences of Godel proved a famous theorem about incompleteness of arithmetic.

Purpose of the article. To develop synonymous numerations by the natural numbers of eventual discrete sequences programs and calculable functions mutually.

Results. On the basis of numerations of eventual discrete sequences numerations are built for four commands of machine with unlimited registers (MUR) in the natural numbers of type of $4u$, $4u+1$, $4u+2$, $4u+3$ accordingly. Every program consists of complete list of commands. On the basis of bijection for four commands of MUR certainly mutually synonymous numerations for all programs of MUR. Thus, on the basis of the set program it is possible effectively to find its code number, and vice versa, on the basis of the set number it is possible effectively to find the program.

Conclusions. Synonymous numerations by the natural numbers of complete discrete sequences are developed mutually, programs for MUR and calculable functions. Leaning against numeration of the programs it is set in the theory of calculable functions, that the universal programs are, that programs which will realize all other programs. By application of the calculated functions and *s-m-n* theorem are got to operation on the calculated functions: combination φ_x and φ_y, giving work $\varphi_x\varphi_y$, operation of conversion of functions, effective operation of recursion. Thus, the index of function $\varphi_x\varphi_y$ is on the indexes of x and y [2].

Keywords: numeration, Godel code number, diagonal method.