КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.644; 519.711 DOI:10.34229/2707-451X.22.2.5

О.М. КОЛОМИС, Л.В. ЛУЦ

АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ПЕРВИННОЇ ОЦІНКИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ ШПФ ТА АНАЛІЗ ЙОГО ТОЧНОСТІ

Наведено ефективний за швидкодією алгоритм обчислення первинної оцінки спектральної щільності стаціонарних ергодичних випадкових процесів із нульовим середнім значенням з застосуванням алгоритму ШПФ. Отримано оцінки похибки заокруглення та неусувної похибки наведеного алгоритму.

Ключові слова: *первинна оцінка спектральної щільності, швидке перетворення Фур'є, дискретне перетворення Фур'є, похибка заокруглення, похибка задання вхідних даних.*

Вступ. Швидкі алгоритми розв'язання задач спектрального і кореляційного аналізу випадкових процесів почали з'являтися, в основному, після 1965 року, коли в обчислювальну практику увійшов алгоритм швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) [1, 2]. Із його появою було розроблено ряд обчислювальних алгоритмів прискореного розв'язання деяких задач цифрової обробки сигналів, побудовані ефективні за швидкодією алгоритми обчислення таких оцінок імовірнісних характеристик об'єктів керування, як оцінок згорток, кореляційних функцій, спектральних щільностей стаціонарних і деяких типів нестаціонарних випадкових процесів [2, 3].

Розглянемо ефективний за швидкодією алгоритм обчислення первинної оцінки спектральної щільності стаціонарних ергодичних випадкових процесів із нульовим середнім значенням. Найчастіше для його обчислення використовують метод прямого перетворення Фур'є з використанням алгоритму ШПФ [2, 3]. Дана стаття продовжує дослідження і обґрунтування цього методу в напрямку отримання більш якісних оцінок похибок заокруглення.

1. Постановка задачі. Нехай $x(t)$ – випадковий стаціонарний ергодичний процес з нульовим середнім значенням і задана вибірка $\tilde{x}_\nu = \tilde{x}(t_\nu)$, $\nu = \overline{0, N-1}$, з похибкою δ_ν, тобто

$$|x_\nu - \tilde{x}_\nu| \le \delta_\nu, \quad \nu = \overline{0, N-1}. \qquad (1)$$

Оцінка спектральної щільності визначається співвідношенням [2, 4]

$$S_x(k) = S_x(\omega_k) = \frac{h}{N}\left|\hat{X}_k\right|^2, \quad k = \overline{0, N-1}, \qquad (2)$$

де h – крок по часу, $\hat{X}_k = \hat{X}(\omega_k)$ – дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) початкового сигналу $x(t)$, $\omega_k = k/(Nh)$, $k = \overline{0, N-1}$.

Для обчислення $\hat{X}_k$, $k=\overline{0,N-1}$, будемо використовувати алгоритм ШПФ [2, 5]

$$\hat{X}_k = \hat{X}(\omega_k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu W_N^{\nu k}, \tag{3}$$

де $k,\nu=\overline{0,N-1}$, $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$.

Відомо [2], що евклідова норма оцінки похибки заокруглення алгоритму ШПФ обчислення ДПФ $\hat{X}=\left\{\hat{X}_k\right\}_0^{N-1}$ сигналу $x=\left\{x_\nu\right\}_0^{N-1}$, для $N=2^\gamma$, $\gamma>0$ – ціле, має вигляд

$$\left\|E_{\hat{X}}\right\|_E < 8\cdot 1{,}06\cdot\gamma\cdot 2^{-\tau}\cdot\left\|\hat{X}\right\|_E, \tag{4}$$

де τ – кількість двійкових розрядів у мантисі числа для обчислень на комп’ютері в режимі з плаваючою комою.

Первинна оцінка спектральної щільності $S_x(k)$, $k=\overline{0,N-1}$, що визначається у вигляді співвідношення (2) є досить «грубою», оскільки відбувається велике «просочування енергії» через «бокові пелюстки» [2].

Розглянемо алгоритм, який дозволяє обчислювати $S_x(k)$ [1]. Основні кроки алгоритму.

Крок 1. «Набивка» L нулями вихідної послідовності x_ν, $\nu=\overline{0,N_1-1}$, так щоб $N_1=N+L=2^\gamma$, $\gamma>0$ – ціле, у випадку, якщо $N\neq 2^\gamma$.

Крок 2. Обчислення (за ознакою) ДПФ $\hat{X}_k$, $k=\overline{0,N_1-1}$ отриманої послідовності x_ν, $\nu=\overline{0,N_1-1}$, згідно співвідношення (2) з використанням алгоритму ШПФ.

Крок 3. Обчислення $S_x(k)$, $k=\overline{0,N_1-1}$ згідно співвідношення (1).

Крок 4. Кінець.

Відомо [2, 6], що оцінка повної абсолютної похибки E наближеного розв’язку задачі має вигляд:

$$E \le E_H + E_M + E_З, \tag{5}$$

де E_H – оцінка неусувної похибки розв’язку задачі або похибки за рахунок неточності вхідних даних, E_M – оцінка похибки методу, $E_З$ – оцінка похибки заокруглень, що виникає при реалізації обчислювального алгоритму на комп’ютері.

Оскільки розглядається задача обчислення саме оцінки спектральної щільності, а не самої спектральної щільності, то $E_M=0$. Тоді

$$E \le E_H + E_З. \tag{6}$$

В роботі отримані оцінки похибки заокруглень та неусувної похибки наведеного алгоритму обчислення $S_x(k)$, $k=\overline{0,N-1}$, (див. співвідношення (3)), що виникають при реалізації на комп’ютері для класичного правила заокруглення для обчислення в режимі плаваючої коми з τ розрядами у мантисі числа, з урахуванням похибки задання вхідних даних (1).

Оцінка похибки E алгоритму обчислення $S_x(k)$, $k=\overline{0,N-1}$. Позначимо $fl(*)$ – результат обчислення виразу, який стоїть у дужках, у режимі з плаваючою комою з τ розрядами у мантисі числа, $\left\|*\right\|_E$ – евклідова норма. Справедлива теорема.

Теорема. Нехай $N = 2^{\gamma}$, $\gamma > 0$ – ціле, $\tilde{x}_{\nu} = \tilde{x}(t_{\nu})$, $\nu = \overline{0, N-1}$ – наближено задані значення випадкового стаціонарного ергодичного процесу $x(t)$ з нульовим середнім значенням, для яких має місце співвідношення (1).

Оцінка евклідової норми похибки E обчислення $S_x(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, згідно виразу (2) за допомогою алгоритму ШПФ для режиму з плаваючою комою з τ розрядами у мантисі числа має вигляд

$$\left\| E_{S_x} \right\|_E \le 8 \cdot 1{,}06 \cdot \gamma \cdot 2^{-\tau} \cdot h \cdot \left[1 + 1{,}06 \cdot 2^{-\tau} (16\gamma + \sqrt{N}) \right] \left(\|\tilde{x}\|_E + \|\delta\|_E \right)^2. \tag{7}$$

Доведення. Фактичним значенням оцінки спектральної щільності $S_x(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, що визначається співвідношенням (2), при обчисленні його на комп’ютері в режимі з плаваючою комою з τ розрядами у мантисі числа буде вираз

$$fl(S_x(k)) = fl\left(\frac{h}{N} \left| \hat{X}_k \right|^2 \right) = \frac{h}{N} \left| \hat{X}_k + E_{\hat{X}}(k) \right|^2 (1 + \varepsilon_1(k)) \le \frac{h}{N} \left(\left| \hat{X}_k \right|^2 + E_1(k) \right), \tag{8}$$

де $E_{\hat{X}}(k) = E_{\hat{X},k}$ – похибка заокруглення обчислення $\hat{X}_k$ алгоритмом ШПФ, $\varepsilon_1(k)$ – похибка заокруглення, що виникає при множенні двох чисел [7], $E_1(k)$ з точністю до величини другого порядку малості відносно $\varepsilon_1(k)$ та $E_{\hat{X}}(k)$ визначається виразом:

$$E_1(k) = 2 \left| \hat{X}_k \right| \cdot \left| E_{\hat{X}}(k) \right| + \left| \hat{X}_k \right|^2 \varepsilon_1(k). \tag{9}$$

Оскільки задані наближені значення $\tilde{x}_{\nu}$, $\nu = \overline{0, N-1}$, випадкового сигналу $x(t)$, співвідношення (8) з урахуванням наближеного задання вхідних даних (1) буде мати вигляд

$$fl(S_x(k)) \le \frac{h}{N} \left(\left| \hat{X}_k \right|^2 + E_1(k) \right), \tag{10}$$

де $\hat{X}_k$ – ДПФ сигналу $\tilde{x}_{\nu}$, $\nu = \overline{0, N-1}$, та отримаємо вираз для визначення $E_1(k)$, $k = \overline{0, N-1}$.

Згідно (1), представимо: $x_{\nu} = \tilde{x}_{\nu} + \delta_{\nu}$, $\nu = \overline{0, N-1}$. Тоді мають місце співвідношення: $\hat{X}_k = \hat{\tilde{X}}_k + \hat{\delta}_k$ і $E_{\hat{X},k} = E_{\hat{\tilde{X}},k} + E_{\hat{\delta},k}$. Із (8) з точністю до величини другого порядку малості відносно $E_{\hat{\tilde{X}},k}$, $E_{\hat{\delta},k}$ та $\varepsilon_1(k)$ отримаємо

$$fl(S_x(k)) \le \frac{h}{N} \left(\left| \hat{\tilde{X}}_k + \hat{\delta}_k \right| + \left| E_{\hat{\tilde{X}},k} + E_{\hat{\delta},k} \right| \right)^2 (1 + \varepsilon_1(k)) \le \frac{h}{N} \Big[\left| \hat{\tilde{X}}_k \right|^2 + 2 \left| \hat{\tilde{X}}_k \right| \left| \hat{\delta}_k \right| + \left| \hat{\delta}_k \right|^2 +$$

$$+ 2 \left| \hat{\tilde{X}}_k \right| \left| E_{\hat{\tilde{X}},k} \right| + 2 \left| \hat{\delta}_k \right| \left| E_{\hat{\tilde{X}},k} \right| + 2 \left| \hat{\tilde{X}}_k \right| \left| E_{\hat{\delta},k} \right| + 2 \left| \hat{\delta}_k \right| \left| E_{\hat{\delta},k} \right| + \left| \hat{\tilde{X}}_k \right|^2 \varepsilon_1(k) + 2 \left| \hat{\tilde{X}}_k \right| \left| \hat{\delta}_k \right| \varepsilon_1(k) +$$

$$+ \left| \hat{\delta}_k \right|^2 \varepsilon_1(k) \Big] = \frac{h}{N} \left[\hat{\tilde{X}}_k^2 + \tilde{E}_1(k) \right],$$

де

$$\tilde{E}_1(k)=\left|\hat{\tilde{X}}_k\right|^2\varepsilon_1(k)+2\left|\hat{\tilde{X}}_k\right|\left(\left|\hat{\delta}_k\right|+\left|E_{\hat{\tilde{X}},k}\right|+\left|E_{\hat{\delta},k}\right|+\left|\hat{\delta}_k\right|\varepsilon_1(k)\right)+$$
$$+2\left|\hat{\delta}_k\right|\left(\left|E_{\hat{\tilde{X}},k}\right|+\left|E_{\hat{\delta},k}\right|\right)+\left|\hat{\delta}_k\right|^2\varepsilon_1(k)+\left|\hat{\delta}_k\right|^2. \quad (11)$$

Позначимо

$$\hat{Z}(k)=\frac{h}{N}\left[\hat{\tilde{X}}_k^2+\tilde{E}_1(k)\right].$$

Визначимо оцінку $\left\| E_{S_x} \right\|_E$ – похибки заокруглення обчислення $S_x(k)$, $k=\overline{0,N-1}$, з використанням алгоритму ШПФ. Згідно (4)

$$\left\| E_{S_x} \right\|_E < 8\cdot 1{,}06\cdot\gamma\cdot 2^{-\tau}\cdot\left\|\hat{Z}\right\|_E. \quad (12)$$

Для оцінки $\left\|\hat{Z}\right\|_E$ під векторами $\hat{\tilde{X}}$, $\tilde{x}$, δ, ε_1 будемо розуміти ($N\times N$)-матриці, перші рядки яких співпадають відповідно з компонентами вказаних векторів, а решта елементів дорівнюють нулю. Тоді [7]

$$\left\|\hat{Z}\right\|_E \le \frac{h}{N}\left(\left\|\hat{\tilde{X}}\right\|_E^2+\left\|\tilde{E}_1\right\|_E\right),$$

де

$$\left\|\tilde{E}_1\right\|_E=\left\|\hat{\tilde{X}}\right\|_E^2\left\|\varepsilon_1\right\|_E+2\left\|\hat{\tilde{X}}\right\|_E\left(\left\|\hat{\delta}\right\|_E+\left\|E_{\hat{\tilde{X}}}\right\|_E+\left\|E_{\hat{\delta}}\right\|_E+\left\|\hat{\delta}\right\|_E\left\|\varepsilon_1\right\|_E\right)+2\left\|\hat{\delta}\right\|_E\left(\left\|E_{\hat{\tilde{X}}}\right\|_E+\left\|E_{\hat{\delta}}\right\|_E\right)+$$
$$+\left\|\hat{\delta}\right\|_E^2\left\|\varepsilon_1\right\|_E+\left\|\hat{\delta}\right\|_E^2.$$

Враховуючи, що $\left|\varepsilon_1\right|\le 1{,}06\cdot 2^{-\tau}$, отримуємо

$$\left\|\varepsilon_1\right\|_E\le\sqrt{N}\cdot 1{,}06\cdot 2^{-\tau}.$$

Згідно (4)

$$\left\|E_{\hat{\tilde{X}}}\right\|_E<8\cdot 1{,}06\cdot\gamma\cdot 2^{-\tau}\left\|\hat{\tilde{X}}\right\|_E,$$
$$\left\|E_{\hat{\delta}}\right\|_E<8\cdot 1{,}06\cdot\gamma\cdot 2^{-\tau}\left\|\hat{\delta}\right\|_E. \quad (13)$$

Використовуючи той факт, що

$$\left\|\hat{\tilde{X}}\right\|_E\le\sqrt{N}\cdot\left\|\tilde{x}\right\|_E, \quad (14)$$

остаточно отримуємо

$$\frac{1}{N}\left\|E_1\right\|_E<1{,}06\cdot 2^{-\tau}\left\|\tilde{x}\right\|_E^2\left(16\gamma+\sqrt{N}\right)+2\left\|\tilde{x}\right\|_E\left\|\delta\right\|_E^2\left(1+1{,}06\cdot 2^{-\tau}(16\gamma+\sqrt{N})\right)+$$
$$+\left\|\delta\right\|_E^2\left(1+1{,}06\cdot 2^{-\tau}(16\gamma+\sqrt{N})\right) \quad (15)$$

та

$$\left\|Z\right\|_E<h\left[1+1{,}06\cdot 2^{-\tau}(16\gamma+\sqrt{N})\right]\left(\left\|\tilde{x}\right\|_E+\left\|\delta\right\|_E\right)^2. \quad (16)$$

Підставивши (16) у співвідношення (12), отримуємо оцінку (7).

Теорема доведена.

Наслідок 1. З точністю до величини другого порядку малості відносно $2^{-\tau}$ виконується співвідношення

$$\left\| E_{S_x} \right\|_E < \cdot 8 \cdot 1{,}06 \cdot \gamma \cdot h \cdot 2^{-\tau} \cdot \left(\|\tilde{x}\|_E + \|\delta\|_E \right)^2 . \qquad (17)$$

Наслідок 2. У випадку, коли $\delta_\nu = 0$, тоді $\tilde{x}_\nu = x_\nu$, $\nu = \overline{0, N-1}$ оцінка (7) буде мати вигляд

$$\| E_3 \|_E = \left\| E_{S_x} \right\|_E < 8 \cdot 1{,}06 \cdot \gamma \cdot 2^{-\tau} \cdot h \cdot \| x \|_E^2 \left[1 + 1{,}06 \cdot 2^{-\tau} (16\gamma + \sqrt{N}) \right], \qquad (18)$$

або, з точністю до величини другого порядку малості відносно $2^{-\tau}$,

$$\left\| E_{3,S_x} \right\|_E < \cdot 8 \cdot 1{,}06 \cdot \gamma \cdot h \cdot 2^{-\tau} \cdot \|x\|_E^2 . \qquad (19)$$

Основними характеристики наведеного алгоритму обчислення первинної оцінки спектральної щільності є точність та обчислювальна складність. В роботі основна увага приділена аналізу точності. Зокрема, досліджена оцінка похибки заокруглення E_3, що виникає при реалізації обчислювального алгоритму на комп'ютері для класичного правила заокруглення, для обчислень у режимі плаваючої коми з τ розрядами в мантисі числа.

Список літератури

1. Stockham T.G. High speed convolution and correlation. AFIPS Proceedings of the April 26–28, 1966. P. 229–233. https://doi.org/10.1145/1464182.1464209
2. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье. Киев: Наук. думка, 1983. 216 с.
3. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання. Киев: Наук. думка, 2012. – 400 с.
4. Бендат Д., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974. 463 с.
5. Cooley J.W., Tukey J.W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier Series. Math. Comput., 1965, Apr. P. 257–301. https://www.ams.org/journals/mcom/1965-19-090/S0025-5718-1965-0178586-1/S0025-5718-1965-0178586-1.pdf
6. Характеристики задач, алгоритмов и ЕОМ в комплексах программ вычислительной математики / В.В. Иванов, М.Д. Бабич, А.И. Березовский, П.Н. Бесараб, В.К. Задирака, В.А. Людвиченко. К., 1984. 54 с. (Препринт / Ин-т Кибернетики АН УССР; 84–36).
7. Wilkinson J.H. The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford: Clarendon Press. 1965. 662 p. https://ru.djvu.online/file/X75oFFC5CY5w9

Одержано 12.09.2022

Коломис Олена Миколаївна,
кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
https://orcid.org/0000-0001-7174-1381
kolomys@ukr.net

Луц Лілія Володимирівна,
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
https://orcid.org/0000-0003-0746-9701
lv1@ukr.net

UDC 519.644; 519.711

Olena Kolomys [*]**, Liliya Luts** [*]

Algorithm for Calculating Primary Spectral Density Estimates Using FFT and Analysis of its Accuracy

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
[*] *Correspondence: kolomys@ukr.net, lv1@ukr.net*

Introduction. Fast algorithms for solving problems of spectral and correlation analysis of random processes began to appear mainly after 1965, when the algorithm of fast Fourier transform (FFT) entered computational practice. With its appearance, a number of computational algorithms for the accelerated solution of some problems of digital signal processing were developed, speed-efficient algorithms for calculating such estimates of probabilistic characteristics of control objects as estimates of convolutions, correlation functions, spectral densities of stationary and some types of non-stationary random processes were built.

The purpose of the article is to study a speed-efficient algorithm for calculating the primary estimate of the spectral density of stationary ergodic random processes with zero mean. Most often, the direct Fourier transform method using the FFT algorithm, is used to calculate it. The article continues the research and substantiation of this method in the direction of obtaining better estimates of rounding errors.

Results. The research and substantiation of the method in the direction of obtaining more qualitative estimates of rounding errors, taking into account the errors of the input information specification, has been continued. The main characteristics of the given algorithm for calculating the primary estimate of the spectral density are accuracy and computational complexity.

The main attention is paid to obtaining error estimates accompanying the process of calculating the primary estimate of the spectral density. The estimates of the rounding error and ineradicable error of the given algorithm for calculating the primary estimate of the spectral density, which appear during the implementation of the algorithm for the classical rounding rule for calculation in floating-point mode with τ digits in the mantissa of the number, taking into account the input error, are obtained.

Conclusions. The obtained results make it possible to diagnose the quality of the solution to the problem of calculating the primary estimate of the spectral density of stationary ergodic random processes with a zero mean value by the described method and to choose the parameters of the algorithm that will ensure the required accuracy of the approximate solution of the problem.

Keywords: primary estimation of spectral density, fast Fourier transform, discrete Fourier transform, rounding error, input error.