КІБЕРНЕТИКА та КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.64 DOI:10.34229/2707-451X.23.1.4

В.К. ЗАДІРАКА, І.В. ШВІДЧЕНКО

КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНОЛОГІЯ ПОБУДОВИ ε-РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

На основі аналізу повної похибки обчислювального алгоритму (ОА) наводиться комп'ютерна технологія (КТ) побудови ε-розв'язку задачі. КТ проілюстрована на задачах чисельного інтегрування швидкоосцилюючих функцій, кореляційного аналізу випадкових процесів.

Ключові слова: *повна похибка, комп'ютерна технологія, похибка заокруглення, швидкоосцилюючі функції.*

Постановка задачі. Розглядаються питання вибору та побудови обчислювальних ресурсів та способи ефективного їх використання для обчислення наближеного розв'язку задачі із заданою точністю за обмежений процесорний час [1, 2]. Застосовані елементи комп'ютерної технології (КТ) розв'язування конкретних задач на прикладах задач інтегрування швидкоосцилюючих функцій та кореляційного аналізу випадкових процесів.

Загальна схема розв'язування задач прикладної та обчислювальної математики з використанням КТ включає такі етапи:

1) постановка прикладної задачі в термінах прикладної області;

2) вибір математичної моделі (ММ) прикладної задачі;

3) вибір комп'ютерної моделі обчислень (КМО), до якої входять такі складові:

– вхідні дані про задачу;

– клас задач обчислювальної математики на основі вхідних даних;

– класи обчислювальних алгоритмів (ОА) обчислення розв'язку, побудови оцінок характеристик якості та параметрів обчислювального процесу (ОП);

– архітектура комп'ютера;

– програмне забезпечення ОП;

– обмеження на значення характеристик якості.

4) побудова оцінок характеристик якості та параметрів ОП;

5) можливі коригування ММ, складових КМО та повторний розгляд етапів цієї схеми;

6) побудова ОП та проведення обчислень;

7) інтерпретація результатів обчислень.

Як видно з наведеної схеми, КТ включає формування певного набору обчислювальних ресурсів, спосіб та умови їх використання для побудови ОП, результатом якого має бути розв'язок задачі.

Зважаючи на те, що розглядаються КТ, основна увага приділяється етапам 3) – 6) схеми.

Нехай F – клас задач (обчислювальної математики), $A(X)$ – клас ОА, призначених для побудови розв'язків задач із класу F з використанням вхідної інформації $I = I\left(I_0, I_n(P)\right)$, де I_0 – інформація про властивості задач із класу F, $I_n = I_n(P) = \left(i_1(P), ..., i_n(P)\right)^T$ – інформація про задачу P у вигляді n функціоналів, обчислених (або таких, що обчислюються в процесі побудови розв'язків) на елементах задачі P.

Нехай $c(Y)$ – модель комп'ютера, яка має певні архітектурні властивості комп'ютера і належить деякому класу моделей $c(Y)$.

Загальна ситуація побудови наближеного ε-розв'язку задачі $P \in F$ при обмежених обчислювальних ресурсах може бути описана також умовами:

$$E(I, X, Y) \le \varepsilon, \tag{1}$$

$$T(I, X, Y, \varepsilon) \le T_0(\varepsilon), \tag{2}$$

$$M(I, X, Y, \varepsilon) \le M_0(\varepsilon), \tag{3}$$

де ε, T_0, M_0 – задані числа, $E(I, X, Y)$ – повна похибка наближеного розв'язку задачі $P \in F$, яка є сумою трьох складових: $E_H(\cdot)$ – неусувної похибки або похибки за рахунок неточності вхідних даних; $E_M(\cdot)$ – похибки методу; $E_\tau(\cdot)$ – похибки заокруглень [3]; X, Y – вектори параметрів, які характеризують відповідно алгоритми та комп'ютери із класів A та C; $T(\varepsilon, I, X, Y)$, $M(\varepsilon, I, X, Y)$ – процесорний час та пам'ять комп'ютера, необхідні для обчислення наближеного розв'язку; ε, $T_0(\varepsilon)$, $M_0(\varepsilon)$ – числа, задані на основі вимог до математичного моделювання та властивостей вхідної інформації (обсяг, точність, структура, спосіб отримання).

Наближений розв'язок, для якого виконується умова (1), називається ε-розв'язком, $A(\varepsilon, X, Y)$ – множина ОА побудови ε-розв'язку в даній КМО.

ОА, який задовольняє умови (1), (2), називається T-ефективним ОА, $A(\varepsilon, T_0, X, Y)$ – множина T-ефективних ОА в даній КМО [2].

Таким чином, потрібно розробити або вибрати серед відомих таку ОА-програму (ОА і відповідна програма збігаються з точністю до похибок заокруглення) $ap \in AP$, де $AP(\varepsilon, X, Y)$ – множина ОА-програм, орієнтованих на розв'язання задач із класу F, яка при вибраній архітектурі комп'ютера $c(Y)$ забезпечить обчислення розв'язку прикладної задачі $P(I) \in F$ із заданими значеннями характеристик якості, а саме, задачі (1) – (3).

Поряд з задачею (1) – (3) доцільно розглянути також задачу

$$\min_{I, X, Y} E(I, X, Y), \tag{4}$$

$$T(I, X, Y) \le T_0. \tag{5}$$

Потреби у розв'язанні задачі із заданими значеннями характеристик якості ε-розв'язку (E, T, M) і в отриманні інформації про можливість забезпечення такого розв'язку за допомогою відповідної програми виникають у випадках, коли:

– слід забезпечити розв'язок задачі із заданою (або гарантованою) точністю при деяких заданих обмеженнях на необхідні процесорний час і оперативну пам'ять комп'ютера;

– потрібна діагностика якості отримуваного ε -розв'язку задачі за точністю і часом її розв'язку;

– необхідно заздалегідь знати про можливість побудови ε -розв'язку задачі із заданими значеннями характеристик якості (E, T, M), наприклад, з метою вибору (або розробки) ОА-програми для включення її в проблемно-орієнтовану систему прикладних програм [2].

Оскільки характеристики E, E_H, E_M, E_τ, $T(I, X, Y)$, $M(I, X, Y)$, зазвичай, точно не відомі, то розглядаються деякі оцінки цих характеристик. Надалі обмеження (3) можна зняти, але можливо за рахунок збільшення величини процесорного часу T.

Нехай ε^0 – нижня межа похибки наближеного розв'язку, а $T_0(\varepsilon)$ – нижня межа процесорного часу обчислення ε -розв'язку в даній КМО. Залежно від обчислювальних ресурсів та обмежень (1), (2) можна виділити такі ситуації:

$$A(\varepsilon, X) \neq \varnothing,\ A(\varepsilon, T_0) \neq \varnothing, \tag{6}$$

$$A(\varepsilon, X) = \varnothing, \tag{7}$$

$$A(\varepsilon, X) \neq \varnothing,\ A(\varepsilon, T_0) = \varnothing. \tag{8}$$

Таким чином, побудова ОП при заданих умовах обчислень пов'язана з питаннями існування ε -розв'язку, T -ефективних ОА та коригування КТ чи переходом до нової у випадках (7), (8) з метою звести ці ситуації до ситуації (6) та побудови реального ОП [4].

Ці питання вирішуються шляхом вибору складових КМО та способу їх ефективного використання. Важлива роль при цьому належить оцінкам міри похибки наближеного розв'язку та процесорного часу.

Умови існування ε -розв'язку задачі. Обчислювальна складність (T) часто визначається вимогами до точності наближеного розв'язку, співвідношеннями складових повної похибки, залежністю похибки від типу, структури, обсягу вхідних даних та їх точності, розрядної сітки комп'ютера та правила заокруглення, від типу оцінок похибок [5]. Ці обставини враховуються певним чином при формуванні моделі обчислень та використанні її для побудови ОП. Розглянемо вплив окремих складових повної похибки на можливість виконання умов (1), (2). Інформація I_0 (що визначає клас задач) та $I_n(f)$ (що стосується конкретної задачі), зазвичай, задана наближено. Нехай $I_0^T, I_n^T(f)$ – точні значення цієї інформації, а інформація $I_0, I_n(f)$ – точна для деякої задачі φ, $(\varphi \in F)$; R_f та R_φ – точні розв'язки задач відповідно до інформації $I_0^T, I_n^T(f)$ та $I_0, I_n(f)$; R_f^α, R_φ^α – наближення до R_f, R_φ обчислені деяким алгоритмом у припущенні, що обчислення виконуються точно (без заокруглень); R_f^τ, R_φ^τ – розв'язки, обчислені тим же алгоритмом із заокругленнями. Тоді можна записати

$$E(I, X, Y) = R_f - R_\varphi^\tau = \left(R_f - R_\varphi\right) + \left(R_\varphi - R_\varphi^\alpha\right) + \left(R_\varphi^\alpha - R_\varphi^\tau\right) = E_H(\cdot) + E_M(\cdot) + E_\tau(\cdot)$$

та

$$\rho(E) \leq \rho(E_H) + \rho(E_M) + \rho(E_\tau).$$

Розглянемо можливі розподіли доданків в умові

$$\rho(E_H) + \rho(E_M) + \rho(E_\tau) \leq \varepsilon$$

з урахуванням умови (2). Замінимо цю умову такими

$$\rho\left(E_H\right) \le \delta_H \ , \ \rho\left(E_M\right) \le \delta_M \ , \ \rho\left(E_\tau\right) \le \delta_\tau \ ,$$

де $\delta_i \le \alpha_i \varepsilon$, $\sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i \ge 0$, $i = H, M, \tau$.

Згаданий розподіл визначається вибором чисел $\{\alpha_i\}$. Невдалий розподіл може значно ускладнити виконання умов (2), (3). Наприклад, при $0 \le \varepsilon - \rho\left(E_H\right) << \varepsilon$ треба накласти жорсткі обмеження на дві інші складові повної похибки:

$$\rho\left(E_M\right) + \rho\left(E_\tau\right) \le \varepsilon_1 = \varepsilon - \rho\left(E_H\right) << \varepsilon \,. \tag{9}$$

Нехай, наприклад, ОА реалізують схеми чисельного інтегрування (інтеграли, диференціальні рівняння), де $I_n\left(f\right)$ – набір значень підінтегральної функції чи правих частин рівнянь. У цьому разі (за певним правилом заокруглення)

$$E_M\left(I_n\left(f\right)\right) = \mathrm{O}\left(n^{-p}\right), \ E_\tau\left(I_n\left(f\right)\right) = \mathrm{O}\left(n \cdot 2^{-\tau}\right), \tag{10}$$

де p – порядок точності чисельного методу, τ – довжина мантиси чисел при основі 2. При цьому

$$\rho^0_{M\tau}\left(\tau\right) = \min_n\left(E_M + E_\tau\right) = \mathrm{O}\left(n_0^{-p}\left(\tau\right)\right), \tag{11}$$

де

$$n_0 = \mathrm{O}\left(2^{\tau/(p+1)}\right), \ \rho\left(E_M\right), \ \rho\left(E_\tau\right) = \mathrm{O}\left(2^{-\tau p/(p+1)}\right), \ \tau \to \infty \,. \tag{12}$$

Як видно з (11), для кожного τ за деяким $n_0\left(\tau\right)$ досягається мінімум міри обчислювальної похибки $\rho^0_{M\tau}\left(\tau\right)$. При цьому виконання необхідної умови існування ε-розв'язку $\rho^0_{M\tau}\left(\tau\right) \le \varepsilon_1 = \varepsilon - \rho\left(E_H\right)$ пов'язане із співвідношеннями

$$n = \mathrm{O}\left(\varepsilon_1^{-1/p}\right), \ \tau = \mathrm{O}\left(\log \varepsilon_1^{-1}\right), \ \varepsilon_1 \to 0 \,. \tag{13}$$

Для обчислення ε-розв'язку за допомогою лінійної обчислювальної схеми потрібен процесорний час:

$$T\left(\varepsilon\right) = n\left(\varepsilon_1\right)\beta\left(\varepsilon_1\right)\alpha\left(\tau\right), \tag{14}$$

де $\beta\left(\varepsilon_1\right)$ – середня кількість операцій обчислення одного функціоналу із набору $I_n\left(f\right)$ та використання його для реалізації ОА, $\alpha\left(\tau\right)$ – середня ціна однієї операції при обчисленні ε-розв'язку. Якщо покласти $\alpha\left(\tau\right) = \mathrm{O}\left(\tau\right)$ (при розпаралелюванні операції множення двох чисел) [6], то з (13) і (14) маємо

$$T\left(\varepsilon_1\right) = \mathrm{O}\left(\varepsilon_1^{-1/p} \cdot \log \varepsilon_1^{-1}\right), \varepsilon_1 \to 0 \,.$$

Отже, наслідком умови (10) цілком можлива ситуація (8).

Елементи технології розв'язання задач із заданими значеннями характеристик якості.

Концепція даної технології полягає у наступному:

– виходячи з умов використання шуканого розв'язку прикладної задачі, яка описується деякою математичною моделлю, задаються вимоги до точності, з якою слід обчислити наближений розв'язок відповідної задачі обчислювальної математики; до процесорного часу обчислення розв'язку; до деяких інших характеристик ОП побудови розв'язку, наприклад, до необхідної оперативної пам'яті комп'ютера, до інтерпретації отриманого розв'язку з урахуванням оцінок характеристик цього розв'язку і ОП;

– з деякої множини відомих (або тих, що розробляються) обчислювальних алгоритмів і програм, орієнтованих для розв'язування класу задач обчислювальної математики, до якого зведена задана прикладна задача, за допомогою оцінок указаних характеристик знаходиться (або розробляється) ОА-програма, яка зможе забезпечити на відповідному комп'ютері побудову розв'язку прикладної задачі із заданими обмеженнями на значення цих характеристик якості, або встановлюється, що ОА-програма із вказаними властивостями для розв'язуваної задачі при заданій вхідній інформації на даний час не існує;

– за допомогою розробленої або наявної з необхідними властивостями ОА-програми обчислюється розв'язок прикладної задачі із заданими значеннями характеристик якості, використовуючи при цьому вибрані комп'ютер і програмну систему.

Зауваження 1. КТ дозволяє визначити границі (червоні лінії) зміни параметрів ОА-програми, коли $E_\tau(\cdot)$ не можна нехтувати, тому що $E_\tau(\cdot)$ стає порівняною чи більшою з іншими похибками. Це дуже важливо особливо для високоточних задач та задач трансобчислювальної складності [6].

Минули ті часи, коли $E_\tau(\cdot)$ можна було нехтувати. Неврахування $E_\tau(\cdot)$ приводить до того, що комп'ютерні моделі при цьому не будуть мати нічого спільного з фізичними [7].

Ще один важливий фактор – треба контролювати процес накопичення похибки заокруглення і запропонувати шляхи зменшення $E_\tau(\cdot)$ (правило заокруглення, швидкі алгоритми арифметики багаторозрядних чисел, паралельні обчислення, використання системи залишкових класів тощо) [6].

Розглянемо застосування викладеної КТ, для знаходження ε-розв'язку задачі інтегрування швидкоосцилюючих функцій (ІШОФ).

Визначення оптимальних параметрів обчислювальних алгоритмів для знаходження ε-розв'язку задачі інтегрування швидкоосцилюючих функцій. Розглянемо задачі (1) – (3) (а також (4) – (5)) стосовно обчислення ІШОФ вигляду

$$I(\omega)=\begin{Bmatrix} I_1(\omega) \\ I_2(\omega) \\ I_3(\omega) \end{Bmatrix}=\int_a^b f(x)\begin{Bmatrix} e^{-i\omega x} \\ \sin\omega x \\ \cos\omega x \end{Bmatrix}dx \qquad (15)$$

та запропонуємо деякі підходи до їх розв'язання. Тут функції $f(x)$ належать деяким класам функцій $f(x)\in F$ різного ступеня гладкості, ω – довільне дійсне число, і інформація про $f(x)$ задана не більше ніж N значеннями інформаційного оператора, $|\omega|\ge 2\pi(b-a)$.

Відомо [5], що для ОА-програми розв'язку задачі обчислення $I(\omega)$ у випадку, коли $I_N(f)=\{f_i\}_0^{N-1}$ і обчислення проводяться у режимі плаваючої коми з τ розрядами у мантисі чисел у двійковому представленні, в загальному вигляді справедливі наступні оцінки:

$$E_M(I_N(f))=E_M(N)=O\left(N^{-p}\right), \qquad (16)$$

$$E_\tau(I_N(f))=E_\tau(N)=O\left(N\cdot 2^{-\tau}\right), \qquad (17)$$

де p – порядок точності чисельного методу і залежить від гладкості класу F. При цьому

$$\varepsilon^0_{M\tau}(\tau)=\min_N\left(E_{M\tau}\left(I_N(f),\alpha,C\right)\right)=O\left({N_0}^{-p}(\tau)\right), \qquad (18)$$

де $E_{M\tau}=E_M+E_\tau$, $N_0(\tau)=O\left(2^{\tau/(p+1)}\right)$, а $E_M(N_0(\tau))=O\left({N_0}^{-p}(\tau)\right)$, $E_\tau(N_0(\tau))=O\left({N_0}^{-p}(\tau)\right)$.

При $N \ll N_0$ домінує похибка методу E_M. Вона може бути зменшена шляхом використання оптимальних наборів I_N, збільшення N (з урахуванням (18)), використання оптимальних за точністю і близьких до них ОА, переходу до іншого класу вихідних даних I_N (з метою підвищення порядку точності) і відповідних йому ОА.

При $N \gg N_0$ домінує похибка заокруглень. Зменшення E_τ може бути досягнуто безпосереднім зменшенням N (з урахуванням (18) або використанням тих же можливостей, що і при $N \ll N_0$ (крім збільшення N), а також збільшенням τ.

Наступна теорема дає загальні підходи до визначення параметрів ОА обчислення $I(\omega)$, які можуть забезпечити розв'язок задачі (1) – (3).

Теорема 1 [8]. Нехай $[a,b] \equiv [0,1]$ і $h = \dfrac{1}{N}$. Значення $h^* \in D$, яке забезпечує розв'язок задачі (1) – (3) стосовно обчислення інтеграла $I(\omega)$, знаходиться в області

$$D: \left[\frac{1}{2^i}\left(\frac{\varepsilon_1}{C_1}\right)^{1/p}, \frac{1}{2^{i-1}}\left(\frac{\varepsilon_1}{C_1}\right)^{1/p} \right], \tag{19}$$

де значення $i = 1, 2, \ldots$ вибирається найменшим таким, що задовольняє умові

$$E_\tau(h_i) \le \left(1 - 2^{-pi}\right)\varepsilon_1, \tag{20}$$

де p – порядок точності ОА, ε_1 визначається із (9), константа C_1 визначається із загального вигляду оцінки E_M досліджуваної ОА-програми $a \in A(\varepsilon, I, X, Y)$.

Зауваження 2. Якщо неможливо знайти h_i, яке б задовольняло умові (20), то це означає, що може бути, або велика оцінка E_τ (оскільки $E_M \le 2^{-p} \cdot \varepsilon_1$), або оцінка E_H. Якщо знайдено h_i, яке задовольняє умові (20), але $i \gg 1$ – це означає, що для обчислення розв'язку задачі (15) з заданою точністю ε необхідно взяти велику кількість $N_i = \left[\dfrac{1}{h_i}\right] + 1$ значень функціонала $I_N(f) = \{f_i\}_0^{N-1}$, і досліджуваний ОА може не бути T-ефективним.

Зауваження 3. Використовуючи оцінки повної похибки E на класах функцій F [1] відповідних оптимальних за точністю (або близьких до них) квадратурних формул, можна визначити константи C_1 і C_2, а, отже, і отримати розв'язки задач (1) – (3) та (4) – (5) стосовно обчислення $I(\omega)$.

Зауваження 4. У тому випадку, коли, не вдається побудувати ОА $a \in A(\varepsilon, T_0)$ обчислення ε-розв'язку задачі (15) на класах функцій $f \in F$, для остаточного висновку про можливість такої побудови важливо мати точні оцінки знизу (або близькі до них) похибки наближеного розв'язку та обчислювальної складності задачі. Скориставшись цими оцінками ОА, можна зробити остаточний висновок: розв'язок задачі із заданими значеннями характеристик якості можна побудувати або такий розв'язок побудувати неможливо і, можливо, необхідно задачу (15) "занурити" в більш вузький клас чи використовувати комп'ютер іншого класу.

Зауваження 5. Отримані результати можуть бути широко застосованими у тестуванні якості розроблених ОА та враховуватися при формулюванні вимог до точності розв'язку різних задач цифрової обробки сигналів.

Комп'ютерні технології розв'язання задач кореляційного аналізу випадкових процесів. Розглянемо питання, пов'язані з визначенням умов, що гарантують обчислення

$$r_{xy}^{*}(j)=r_{xy}^{*}(j\cdot\Delta t)=\frac{1}{N-j}\sum_{k=0}^{N-j-1}x_k y_{k+1},\quad j=\overline{0,L-1}, \tag{21}$$

де $x(t_k)=x_k$, $y(t_k)=y_k$, $k=\overline{0,N-1}$ – дійсні значення випадкових процесів $x(t)$, $y(t)$, у вузлах $t_k=k\cdot\Delta t,\ \Delta t=\dfrac{T}{N}$ з точністю ε за допомогою ОА, який реалізує метод секціонування з використанням алгоритму швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) і вибором оптимальної довжини секції.

Позначимо O_p і O_d – області допустимих значень параметрів і вхідних даних задачі (21). Необхідно визначити O_p ОА і області *вихідних* даних задачі залежно від точності ε, з якою вимагається знайти розв'язок задачі (21). Тобто, необхідно знайти розв'язок задачі (1) – (3) стосовно задач (21), використовуючи оцінки повної похибки E за припущення, що відомі лише наближені значення $\bar{X}(k),\ \bar{Y}(k)$, тобто

$$\left|\bar{X}(k)-X(k)\right|\le\varepsilon_{\bar{X}}(k),\ \left|\bar{Y}(k)-Y(k)\right|\le\varepsilon_{\bar{Y}}(k),\ k=\overline{0,M-1}, \tag{22}$$

і обчислення проводяться на комп'ютері в режимі плаваючої коми з τ розрядами у мантиси чисел.

Якщо при розв'язанні задачі (21) нерівності (1) – (3) виконуються, то при заданих параметрах алгоритму і вхідних даних задачі необхідна точність досягається.

Якщо нерівності (1) – (3) не виконуються, необхідно провести додаткове дослідження і визначити O_p і O_d, які забезпечують їх виконання.

До основних параметрів методу секціонування слід віднести M – довжину вибірок $x(k),\ y(k),\quad k=0,M-1;$ $M1$ – довжину вибірок $\overline{x'}(k),\overline{y'}(k)$ з доповненими нулями, $M1=M+\left[M-[M/p]p\right]-p/2$; p – довжину секції у методі секціонування; L – кількість точок, в яких необхідно обчислити оцінку кореляційної функції.

Якщо нерівності (2), (3) виконані, то O_p має вигляд [9]

$$L\le M1\le M_{\mathrm{Re}}-(L+3p);\ 4\le p\le M1;\ 1\le L\le M. \tag{23}$$

Крім того, обмеження на p пов'язане з використанням алгоритму ШПФ. Для визначення $p_{опт}$ з метою мінімізації часу розв'язання задачі (2) можна скористатися способом, описаним у роботі [8].

Якщо $L,M(M1)$ та $p\in O_p$ і нерівність (1) не виконується, необхідно змінити ці параметри так, щоб набути нових значень $L^{*},M^{*}\left(M1^{*}\right)$ і $p^{*}\in O_p$, при яких необхідна точність досягається.

Якщо при цьому забезпечуватиметься розв'язок задачі (21) з необхідною точністю ε, але $L^{*},M^{*},p^{*}\notin O_p$, подальше дослідження має бути направлене на визначення O_p для $x(t)$ та $y(t)$, тобто на уточнення констант S_1 та S_2 $\left(\max\limits_{t\in[0,T]}x(t)\le S_1,\ \max\limits_{t\in[0,T]}\left|y(t)\right|\le S_2\right)$. Внаслідок отримуємо

$$0\le\|E\|\le\varepsilon,\ x(t)\in H\left(\bar{S}_1\right),\ y(t)\in H\left(\bar{S}_2\right), \tag{24}$$

де $H(\cdot)$ – клас неперервних і обмежених на $[0,T]$ функцій, E – оцінка повної похибки обчислення (21).

Має місце наступна теорема.

Теорема 2 [8]. Нехай L, M, $p \in O_p$ – задані. Якщо $x(t)$ та $y(t)$ належать одному з класів $H(b_i)$ – неперервних і обмежених на $[0,T]$ константами b_i функцій, $i = \overline{1,3}$, де $b_i \in D_i$, D_i – область розв'язків відповідних нерівностей

$$0 \le a_1^{(i)} b_i^4 + a_2^{(i)} b_t^2 + a_3^{(i)} b_i + a_4^{(i)} \le \varepsilon, \tag{25}$$

які являють собою оцінки першої ($i=1$), середньоквадратичної ($i=2$) і евклідової ($i=3$) норм E, то задача обчислення $r_{xy}(j)$, $j = \overline{0, L-1}$, яка визначається співвідношенням (21), алгоритмом секціонування з вибором оптимальної довжини секції, може бути розв'язана з необхідною точністю ε.

Тут для $i = 1$

$$\begin{aligned}
a_1^{(i)} &= \frac{2^{-\tau} \cdot p^2}{M-L}\left[\frac{M}{p-L+3}\right]\left(3 \cdot K(p,\sigma)+1\right),\\
a_2^{(i)} &= \frac{2^{-\tau}}{M-L}\left[\frac{M}{p-L+3}\right]\left(1{,}06 \cdot \left[\frac{M}{p-L+3}\right]+1\right),\\
a_3^{(i)} &= \frac{1}{M-L}\left(\left\|\varepsilon_x^-\right\|_1 + \left\|\varepsilon_y^-\right\|_1\right),\\
a_4^{(i)} &= \frac{1}{M-L}\left(\left\|\varepsilon_x^-\right\|_1 \cdot \left\|\varepsilon_y^-\right\|_1\right).
\end{aligned} \tag{26}$$

Для $i = 2$

$$\begin{aligned}
a_1^{(2)} &= \frac{2^{-\tau}}{\sqrt{LM}\,(M-L)}\left[\frac{M}{p-L+3}\right]\left(24 \cdot 1{,}06 \cdot \gamma + \frac{1}{\sqrt{p}}\right),\\
a_2^{(2)} &= \frac{2^{-\tau}}{\sqrt{LM}\,(M-L)}\left[\frac{M}{p-L+3}\right]\left(1{,}06 \cdot \left[\frac{M}{p-L+3}\right]+1\right),\\
a_3^{(2)} &= \frac{\sqrt{M}}{(M-L)^2}\left(\left\|\varepsilon_x^-\right\|_2 + \left\|\varepsilon_y^-\right\|_2\right),\\
a_4^{(2)} &= \frac{M}{(M-L)^2}\left(\left\|\varepsilon_x^-\right\|_2 \cdot \left\|\varepsilon_y^-\right\|_2\right).
\end{aligned} \tag{27}$$

Для $i = 3$

$$\begin{aligned}
a_1^{(3)} &= 2^{-\tau}\left[\frac{M}{p-L+3}\right]\frac{M\sqrt{L}}{M-L}\left(24 \cdot 1{,}06 \cdot \gamma + \sqrt{p}\right),\\
a_2^{(3)} &= \frac{2^{-\tau}\sqrt{L}}{M-L}\left[\frac{M}{p-L+3}\right]\left(1{,}06 \cdot \left[\frac{M}{p-L+3}\right]+1\right),\\
a_3^{(3)} &= \frac{\sqrt{M}}{M-L}\left(\left\|\varepsilon_x^-\right\|_E + \left\|\varepsilon_y^-\right\|_E\right),\\
a_4^{(3)} &= \frac{1}{M-L}\left(\left\|\varepsilon_x^-\right\|_E \cdot \left\|\varepsilon_y^-\right\|_E\right).
\end{aligned} \tag{28}$$

Для розв'язання нелінійних рівнянь (25) з коефіцієнтами (26) – (28) використовувався метод εs-сіток [10].

В роботі [8] наведені таблиці коренів $b = \max(S_1, S_2)$ для різних значень M та ε з урахуванням (22).

Використовуючи дану таблицю для кожної конкретної задачі (21) обчислення $r_{xy}(j)$, $j = \overline{0, L-1}$, можна визначити, якими мають бути параметри задачі, аби вона могла бути розв'язана з необхідною точністю ε, а також можна отримати наступну інформацію про можливості обчислення $r_{\overline{X}\overline{Y}}(j)$, $j = \overline{0, L-1}$, з необхідною точністю ε при заданих параметрах M, L, $\varepsilon_{\overline{X}}$, $\varepsilon_{\overline{Y}}$, S_1 і S_2.

1. Якщо при заданих параметрах алгоритму S_1 і $S_2 \in D$, то необхідна точність розв'язку задачі (21) досягається.

2. Якщо S_1 і $S_2 \notin D$, то:

– за таблицею можна визначити, з якою точністю гарантується розв'язок задачі обчислення $r_{\overline{X}\overline{Y}}(j)$, $j = \overline{0, L-1}$, при заданих параметрах;

– можна спробувати знайти ті параметри і область D, які забезпечують необхідну точність ε.

3. Розширення D може бути досягнутим за рахунок розв'язання задачі (21) з подвійною точністю.

Таким чином, можна визначити наступну технологію дослідження можливості обчислення оцінок $r^*_{xy}(j)$, $j = \overline{0, L-1}$, з необхідною точністю ε при заданих параметрах і вхідних даних.

1. Визначення O_p згідно (23).

2. Перевірка належності заданих параметрів O_p.

2.1. Нехай $M1, p, L \in O_p$. Тоді обчислюються оцінки $\|E\|_1$ (чи $\|E\|_2, \|E\|_E$), $T, \tilde{M}$ і перевіряються умови (1), (2).

2.1.1. Якщо умови (1), (2) виконуються, то задача розв'язується при заданих параметрах і вхідних даних. Перехід на п. 2.4.

2.1.2. Якщо умови (1), (2) не виконуються, то розв'язується задача знаходження нових параметрів L^*, M^*, p^*, що забезпечують розв'язок задачі з необхідною точністю при заданих обмеженнях.

2.1.2.1. Якщо $L^*, M^*, p^* \in O_p$, то розв'язуємо задачу з цими параметрами. Перехід на п. 2.4.

2.2. Якщо $L^*, M^*, p^* \notin O_p$, то видається коментар про те, з якою точністю гарантується розв'язання задачі в даних O_d і O_p.

2.2.1. Видається коментар про те, що розв'язати задачу з необхідною точністю можна за умови розширення O_p так, щоб $L^*, M^*, p^* \in O_p$ (наприклад, ослабити обмеження на M_{Re} (або T_{Re})), або визначення нової O_d.

2.2.1.2. Розв'язання задачі з новими параметрами. Перехід на п. 2.4.

2.2.2. Якщо O_p не можна змінювати, то видається коментар про те, як потрібно змінити O_d, аби отримати розв'язок з необхідною точністю при заданих параметрах задачі.

2.2.2.1. Визначення O_d шляхом розв'язання нерівності (25) при заданих параметрах задачі та знаходження нових обмежень на S_1 і S_2, що забезпечують виконання (1), (2).

2.2.2.2. Розв'язання задачі з новими обмеженнями. Перехід на п. 2.4.

2.3. Якщо $L^*, M^*, p^* \notin O_p$ і O_d та O_p не можна змінювати, то видається коментар про те, що розв'язати задачу з необхідною точністю не можна.

2.4. Кінець дослідження.

Отримані результати дають можливість видавати користувачеві конкретні рекомендації, виконання яких гарантує досягнення необхідної точності ε при обчисленні $r^*_{xy}(j)$, $j=\overline{0,L-1}$, і розв'язувати задачу за необхідний час при знайдених (або заданих) параметрах і вхідних даних задачі.

Пакет програм розв'язання задач цифрової обробки сигналів (ЦОС-1). Розроблені пакети програм СКАН, STAT, ЦОС-1 розв'язання задач ЦОС, які базуються на вищеописаних ідеях і алгоритмах. В них використані дослідження з теорії похибок [5], розробка оптимальних алгоритмів [1], тестування якості прикладного програмного забезпечення [11], а також технології створення пакетів прикладних програм розв'язання задач обчислювальної і прикладної математики з необхідними характеристиками якості [8].

На прикладі двох класів задач (чисельного інтегрування та обчислення оцінок кореляційних функцій) продемонстрована технологія знаходження оптимальних параметрів обчислювального алгоритму для отримання ε-розв'язку задачі.

Пакет програм ЦОС-1 – це ефективний за точністю і швидкодією програмний засіб загального призначення для розв'язання задач цифрової обробки дискретних сигналів. Він є розвитком пакетів програм СКАН і STAT як в частині поповнення набору розв'язуваних задач і вдосконалення сервісних можливостей, так і використання нових оптимальних за точністю і (або) швидкодією або близьких до них алгоритмів розв'язання виділених класів задач ЦОС.

Найважливішим елементом технології розв'язання задач за допомогою пакету ЦОС-1 є те, що він дозволяє до розв'язання задачі вивчити можливості програми розв'язку задачі за допомогою відповідних програм обчислення апріорних оцінок її основних характеристик (E,T і M).

Пакет програм ЦОС-1 забезпечує розв'язання наступних класів задач:

– обчислення оцінок перетворення Фур'є, синус і косинус перетворень, Z-перетворення;

– обчислення згорток двох дискретних функцій;

– обчислення оцінок авто- і взаємно кореляційних функцій стаціонарних ергодичних випадкових процесів;

– обчислення оцінок спектральної щільності стаціонарних ергодичних випадкових процесів;

– виявлення прихованих періодичностей.

Пакет програм ЦОС-1 складається з:

– 55 програм розв'язання задач з вищеперерахованих класів;

– 21 програми обчислення апріорних оцінок характеристик (E,T і M) відповідних програм;

– набору контрольних прикладів для перевірки працездатності програм пакету.

Технологія розв'язання задачі $Z(I)$ вибраною програмою $A_i(I,X,Y)$ містить наступні елементи:

– обчислення апріорних оцінок характеристик (E,T,M) програми розв'язку задачі;

– отримання інформації про результати її тестування;

– обчислення (шляхом розв'язання однієї із задач (1) – (3)) оцінок найкращих керуючих параметрів програми;

– вивчення на основі отриманої інформації ще до розв'язання задачі можливості її розв'язання з необхідними характеристиками якості;

– задання вхідних даних і розв'язання задачі;

– обчислення апостеріорних оцінок E, T та M;

– аналіз отриманого розв'язку на предмет відповідності його необхідним характеристикам якості.

Для визначення можливості розв'язання задачі з необхідною точністю $E_{\text{Re}} > 0$ за рахунок знаходження її керуючих параметрів X, розв'язуються наступні оптимізаційні задачі:

1) знайти значення параметрів X, які забезпечують $\min\limits_X T(I, X, Y)$ при заданих обмеженнях на E та M;

2) знайти значення параметрів X, які забезпечують виконання обмежень на E, T та M.

Якщо вказані задачі не мають розв'язку, то слід їх розв'язувати при ослаблених обмеженнях на T та M. Якщо і це не приводить до мети, то для розв'язання задачі з необхідною точністю можна спробувати оцінити найкращі керуючі параметри програми X шляхом розв'язання наступної оптимізаційної задачі;

3) знайти $\min\limits_X E(I, X, Y)$ при заданих обмеженнях на T та M і обчислити при знайдених значеннях X апріорну оцінку точності і її складові (неусувну, методу, заокруглень). Аналіз складових оцінки точності дозволить намітити шляхи уточнення апріорної інформації про задачу.

Після визначення можливостей розв'язання задачі $Z(I)$ вибраною програмою $A_i(I, X, Y)$ користувач задає її вхідні дані і розв'язує задачу. Здійснюється аналіз отриманих результатів.

Висновки. В статті розглядається комп'ютерна технологія розв'язання задачі (1) – (3): розв'язання типових задач обчислювальної та прикладної математики з заданими значеннями характеристик якості за точністю та швидкодією.

Наведена постановка задачі, умови існування ε-розв'язку задачі, наведені елементи КТ розв'язання задач із заданими значеннями характеристик якості, досліджень питання визначення оптимальних параметрів ОА-програм для знаходження ε-розв'язку задачі ІШОФ, наведена КТ розв'язання задач кореляційного аналізу випадкових процесів та описаний пакет програм ЦОС-1 розв'язання задач ЦОС.

На прикладі двох класів задач (ІШОФ та обчислення оцінок кореляційних функцій) продемонстрована технологія знаходження оптимальних параметрів ОА-програми для отримання ε-розв'язку задачі.

Список літератури

1. Sergienko I.V., Zadiraka V.K., Lytvyn O.M. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer, 2021. P. 378. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90908-6
2. Сергиенко И.В., Задирака В.К., Бабич М.Д., Березовский А.И., Бесараб П.Н., Людвиченко В.А. О компьютерной технологии построения *Т*-эффективных алгоритмов вычисления ε-решений задач вычислительной и прикладной математики. *Кибернетика и системный анализ*. 2002. **6.** С. 51–64.
3. Иванов В.В., Бабич М.Д., Березовский А.И., Бесараб П.Н., Задирака В.К., Людвиченко В.А. Характеристики задач, алгоритмов и ЭВМ в комплексах программ вычислительной математики. Киев, 1984. 53 с. (Препринт/АН УССр, Ин-т кибернетики; 84–36).
4. Бабич М.Д., Задирака В.К., Сергиенко И.В. Вычислительный эксперимент в проблеме оптимизации вычислений. ІІ. *Кибернетика и системный анализ*. 1999. **2.** С. 59–79.
5. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье. К.: Наукова думка, 1983. 216 с.

6. Задірака В.К., Терещенко А.М. Комп’ютерна арифметика багаторозрядних чисел у послідовній та паралельній моделях обчислень. К.: Наукова думка, 2021. 152 с.
7. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В., Яковлев М.Ф. Паралельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. Киев: Наукова думка, 2008. 246 с.
8. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Мельникова С.С., Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. Т. 2. Застосування. К.: Наукова думка, 2011. 348 с.
9. Задирака В.К., Мельникова С.С. Цифровая обработка сигналов. К.: Наукова думка, 1993. 294 с.
10. Бабич М.Д. Об одном аппроксимационно-итерационном методе решения нелинейных операторных уравнений. *Кибернетика*. 1991. **1.** С. 21–28.
11. Задірака В.К., Хіміч О.М., Швідченко І.В. Моделі комп'ютерних обчислень. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2022. **2.** С. 38–51. https://doi.org/10.34229/2707-451X.22.2.4

Одержано 20.04.2023

Задірака Валерій Костянтинович,
доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України,
завідуючий відділом Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
https://orcid.org/0000-0001-9628-0454
zvk140@ukr.net

Швідченко Інна Віталіївна,
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник,
провідний науковий співробітник Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
https://orcid.org/0000-0002-5434-2845
inetsheva@gmail.com

УДК 519.64

В.К. Задірака [*], І.В. Швідченко [*]

Комп’ютерна технологія побудови ε-розв’язку задачі

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ
[*] *Листування:* zvk140@ukr.net, inetsheva@gmail.com

Вступ. Розглядаються питання вибору та побудови обчислювальних ресурсів та способи ефективного їх використання для обчислення наближеного розв’язку задачі із заданою точністю за обмежений процесорний час.

Мета роботи. На основі аналізу повної похибки обчислювального алгоритму розробити комп’ютерну технологію (КТ) побудови ε-розв’язку задачі і проілюструвати її на задачах інтегрування швидкоосцилюючих функцій та цифрової обробки сигналів.

Результати. Наведена загальна схема розв’язання задач прикладної та обчислювальної математики з використанням комп’ютерної технології.

Комп’ютерна технологія включає формування певного набору обчислювальних ресурсів, спосіб та умови їх використання для побудови обчислювального процесу, результатом якого має бути розв’язок задачі.

Основна увага приділена вибору комп’ютерної моделі обчислень (вхідні дані про задачу, клас задач обчислювальної математики, клас обчислювальних алгоритмів обчислення розв’язку, оцінки характеристик якості та параметрів обчислювального процесу, архітектура комп’ютера, програмне забезпечення, обмеження на значення характеристик якості), побудові оцінок характеристик якості, можливості коригування математичної моделі, побудові обчислювального процесу та проведенню обчислень.

Досліджені питання визначення оптимальних параметрів обчислювальних алгоритмів-програм для знаходження ε-розв’язку, які продемонстровані на двох класах задач – інтегрування швидкоосцилюючих функцій та кореляційному аналізі випадкових процесів.

Висновки. Розглянуті питання вибору та побудови обчислювальних ресурсів та способи ефективного їх використання для обчислення наближеного розв'язку задачі із заданою точністю за обмежений процесорний час. Застосовані елементи комп'ютерної технології розв'язування конкретних задач на прикладах задач інтегрування швидкоосцилюючих функцій та кореляційного аналізу випадкових процесів.

Ключові слова: повна похибка, комп'ютерна технологія, похибка заокруглення, швидкоосцилюючі функції.

UDC 519.64

Valerii Zadiraka *, **Inna Shvidchenko** *

Computer Technology for Construction ε-Solution of the Problem

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
* *Correspondence: zvk140@ukr.net, inetsheva@gmail.com*

Introduction. Issues of selection and construction of computing resources and methods of their effective use to calculate an approximate solution of the problem with the given accuracy in a limited processor time are considered.

The purpose of the article. Based on the analysis of the total error of the computational algorithm, to develop a computer technology (CT) for the construction and solution of the ε-problem and illustrate it on the problems of integrating rapidly oscillating functions and digital signal processing.

The results. The general scheme for solving problems of applied and computational mathematics using computer technology is presented.

Computer technology includes the formation of a certain set of computing resources, the method and conditions of their use to build a computing process, the result of which should be the solution of the problem.

The main attention is paid to the choice of a computer calculations model (input data about the problem, the class of problems of computational mathematics, the class of computational algorithms for calculating the solution, evaluation of quality characteristics and parameters of the computational process, computer architecture, software, restrictions on the value of quality characteristics), the construction of quality characteristic estimates, the possibility of adjusting the mathematical model, the construction of the computational process and the performance of calculations.

The issues of determining the optimal parameters of computational algorithms-programs for finding ε-solution are investigated, which are demonstrated on two classes of problems – integration of rapidly oscillating functions and correlation analysis of random processes.

Conclusions. The issues of selection and construction of computing resources and methods of their effective use to calculate an approximate solution of the problem with the given accuracy in a limited processor time are considered. The elements of computer technology for solving specific problems on the examples of problems of integration of rapidly oscillating functions and correlation analysis of random processes are applied.

Keywords: total error, computer technology, rounding error, rapidly oscillating functions.