КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.64
DOI:10.34229/2707-451X.23.3.5

О.П. НЕЧУЙВІТЕР, С.С. ІВАНОВ

ОПТИМАЛЬНА ЗА ПОРЯДКОМ ТОЧНОСТІ КУБАТУРНА ФОРМУЛА НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКО ОСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ

Наведено оптимальну за порядком точності кубатурну формулу наближеного обчислення потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду на класі диференційовних фінкцій. Кубатурна формула в своїй побудові як дані про функції використовує їх сліди на площинах.

Ключові слова: *інтеграли від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних, кубатурні формули, цифрова обробка сигналів та зображень.*

Вступ. Швидкий розвиток цифрових технологій спонукає науковців створювати нові або вдосконалювати існуючі математичні моделі технічних процесів. На часі є розробка математичних моделей з різними типами використання даних. Одним з прикладів інноваційних рішень стали нові інформаційні оператори, основні принципи побудови яких викладено в [1–3]. Чисельне інтегрування функцій багатьох змінних широко використовується у математичному моделюванні [4–6]. Окремо варто відмітити інтегрування швидко осцилюючих функцій у цифровій обробці сигналів та зображень. В задачах цифрової обробки сигналів та зображень наближене обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій з використанням нових інформаційних операторів дозволило побудувати кубатурні формули з використанням різних типів завдання інформації [7]. Побудовані кубатурні формули використовують як дані значення функції на площинах, на лініях та в точках [8–11]. Доведено, що більшість таких формул – оптимальні за порядком точності. Більш складне та менш досліджене питання це наближене обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних у загальному вигляді [12–15]. В роботах [12–16] представлені квадратурні формули наближеного обчислення потрійних та подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду на класі диференційовних функцій та класі Гельдера. Інформація про функції задавалася відповідними слідами на площинах, лініях. Дана робота має на меті представити оптимальну за порядком точності кубатурну формулу наближеного обчислення потрійного інтегралу від швидко осцилюючих функцій загального виду на класі диференційовних функцій. Інформація про функції буде задаватися слідами на системах взаємно перпендикулярних площин.

1. Постановка задачі. Для наближеного обчислення інтегралу

$$I(f,g,\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin\omega g(x,y,z)dxdydz \tag{1}$$

побудувати та дослідити оптимальну за порядком точності кубатурну формулу на класі диференційовних функцій, яка у своїй побудові використовує значення функції $f(x,y,z)$ та $g(x,y,z)$ на площинах

$$x_k=k\Delta_1-\Delta_1/2,\ y_j=j\Delta_1-\Delta_1/2,\ z_s=s\Delta_1-\Delta_1/2,\ k,j,s=\overline{1,\ell_1},\ \Delta_1=1/\ell_1,$$

$$\tilde{x}_p=p\Delta_2-\Delta_2/2,\ \tilde{y}_q=q\Delta_2-\Delta_2/2,\ \tilde{z}_r=r\Delta_2-\Delta_2/2,\ p,q,r=\overline{1,\ell_2},\ \Delta_2=1/\ell_2.$$

2. Оцінка знизу для похибки чисельного інтегрування на класі $H^{3,r}(M,M)$. Нехай $f(x,y,z)\in F$, $g(x,y,z)\in G$, F, G – множини функцій, визначених в області $[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$. Розглянемо L_N – множину всіх кубатурних формул $l_N(f,g)$, що використовують інформацію про значення функцій $f(x,y,z)$ та $g(x,y,z)$ не більше ніж на N площинах. В роботі [15] було введено величини

$$R_N(f,g,\omega,l_N)=\left|I(f,g,\omega)-l_N(f,g)\right|,$$

$$R_N(F,G,\omega,l_N)=\sup_{f\in F,\ g\in G} R_N(f,g,\omega,l_N),$$

$$R_N(F,G,\omega)=\inf_{l_N\in L_N} R_N(F,G,\omega,l_N).$$

Означення 1. Кубатурна формула $l_N^*(f,g)$, на якій досягається $R_N(F,G,\omega)$, називається оптимальною за точністю кубатурною формулою.

Означення 2. Якщо $R_N(F,G,\omega,\bar{l}_N)\le R_N(F,G,\omega)+\eta$, $\eta>0$, то $\bar{l}_N$ – оптимальна за точністю формула обчислення $I(f,g,\omega)$ з точністю до η.

Означення 3. Якщо $\eta=o(R_N)$ або $\eta=O(R_N)$, то $\bar{l}_N$ називається оптимальною за порядком точності.

В роботі [15] на класі функцій $H^{3,r}(M,M)$ таких, що $\left|u^{(r,0,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|u^{(0,r,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|u^{(0,0,r)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|u^{(r,r,r)}(x,y,z)\right|\le M$ отримано оцінка знизу для похибки чисельного інтегрування.

Означення 4. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на площинах $x_k=k\Delta_1-\Delta_1/2$, $y_j=j\Delta_1-\Delta_1/2$, $z_s=s\Delta_1-\Delta_1/2$, $k,j,s=\overline{1,\ell_1}$, $\Delta_1=1/\ell_1$ розуміємо функції двох змінних $f(x_k,y,z)$, $0\le y\le1$, $0\le z\le1$, $f(x,y_j,z)$, $0\le x\le1$, $0\le z\le1$, $f(x,y,z_s)$, $0\le x\le1$, $0\le y\le1$.

Означення 5. Під слідом функції $g(x,y,z)$ на площинах $\tilde{x}_p = p\Delta_2 - \Delta_2/2$, $\tilde{y}_q = q\Delta_2 - \Delta_2/2$, $\tilde{z}_r = r\Delta_2 - \Delta_2/2$, $p,q,r = \overline{1,\ell_2}$, $\Delta_2 = 1/\ell_2$ розуміємо функції двох змінних $g(\tilde{x}_p, y, z)$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, $g(x, \tilde{y}_q, z)$, $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 1$, $g(x, y, \tilde{z}_r)$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Теорема 1 [15]. Нехай $f(x,y,z)$, $g(x,y,z) \in H^{3,r}(M,M)$, функції $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ задані слідами на $N = 3\ell_1 + 3\ell_2$ відповідних системах взаємно перпендикулярних площин в області $G = [0,1]^3$, тоді при $\ell_1 = \ell_2 = \ell$

$$R_N\left(H^{3,r}(M,M), H^{3,r}(M,M), \omega\right) \ge K \max\left\{ 1/\ell^{3r}, \min\left\{1, |\omega|/\ell^{3r}\right\}\right\}.$$

3. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула. Будемо розглядати клас функцій $H^{3,1}(M,M)$, визначених в області $G = [0,1]^3$ і таких, що

$$\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right| \le M, \quad \left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right| \le M, \quad \left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right| \le M,$$

$$\left|f(x,y,z)\right| \le M, \quad \left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right| \le M.$$

Інтеграл від швидкоосцилюючої функції трьох змінних загального виду визначається формулою (1) для $f(x,y,z)$, $g(x,y,z) \in H^{3,1}(M,M)$. Нехай

$$X1_k = \left[x_{k-1/2}, x_{k+1/2}\right],\ Y1_j = \left[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}\right],\ Z1_s = \left[z_{s-1/2}, z_{s+1/2}\right],$$

$$h1_{1k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X1_k, \\ 0, x \notin X1_k, \end{cases} \quad h1_{2j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y1_j, \\ 0, y \notin Y1_j, \end{cases} \quad h1_{3s}(z) = \begin{cases} 1, z \in Z1_s, \\ 0, z \notin Z1_s, \end{cases}$$

$$x_k = k\Delta_1 - \Delta_1/2, \quad y_j = j\Delta_1 - \Delta_1/2, \ z_s = s\Delta_1 - \Delta_1/2, \quad k,j,s = \overline{1,\ell_1},\ \Delta_1 = 1/\ell_1,$$

$$X2_p = \left[\tilde{x}_{p-1/2}, \tilde{x}_{p+1/2}\right],\ Y2_q = \left[\tilde{y}_{q-1/2}, \tilde{y}_{q+1/2}\right],\ Z2_r = \left[\tilde{z}_{r-1/2}, \tilde{z}_{r+1/2}\right].$$

$$h2_{1p}(x) = \begin{cases} 1, x \in X2_p, \\ 0, x \notin X2_p, \end{cases} \quad h2_{2q}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y2_q, \\ 0, y \notin Y2_q, \end{cases} \quad h2_{3r}(z) = \begin{cases} 1, z \in Z2_r, \\ 0, z \notin Z2_r, \end{cases}$$

$$\tilde{x}_p = p\Delta_2 - \Delta_2/2, \quad \tilde{y}_q = q\Delta_2 - \Delta_2/2,\ \tilde{z}_r = r\Delta_2 - \Delta_2/2, \quad p,q,r = \overline{1,\ell_2},\ \Delta_2 = 1/\ell_2.$$

Розглянемо оператор

$$Jf(x,y,z) = J_1 f(x,y,z) + J_2 f(x,y,z) + J_3 f(x,y,z) -$$
$$- J_1 J_2 f(x,y,z) - J_2 J_3 f(x,y,z) - J_1 J_3 f(x,y,z) + J_1 J_2 J_3 f(x,y,z),$$

де

$$J_1 f(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\ell_1} f(x_k, y, z) h1_{1k}(x), \ J_2 f(x,y,z) = \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x, y_j, z) h1_{2j}(y),$$

$$J_3 f(x,y,z) = \sum_{s=1}^{\ell_1} f(x, y, z_s) h1_{3s}(z),$$

а також оператор

$$Og(x,y,z) = O_1 g(x,y,z) + O_2 g(x,y,z) + O_3 g(x,y,z) -$$

$$-O_1O_2g(x,y,z)-O_2O_3g(x,y,z)-O_1O_3g(x,y,z)+O_1O_2O_3g(x,y,z),$$

де

$$O_1g(x,y,z)=\sum_{p=1}^{\ell_2}g(\tilde{x}_p,y,z)h2_{1p}(x)\,,\ O_2g(x,y,z)=\sum_{q=1}^{\ell_2}g(x,\tilde{y}_q,z)h2_{2q}(y)\,,$$

$$O_3g(x,y,z)=\sum_{r=1}^{\ell_2}f(x,y,\tilde{z}_r)h2_{3r}(z)\,.$$

Для обчислення інтегралу (1) пропонується кубатурна формула

$$\Phi^3(\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y,z)\sin\omega Og(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})dxdydz\,.$$

Теорема 2. Нехай $f(x,y,z),\ g(x,y,z)\in H^{3,r}\left(M,M\right)$, та $f(x,y,z),\ g(x,y,z)$ задані $N=3\ell_1+3\ell_2$ слідами $f(x_k,y,z)$, $f(x,y_j,z)$, $f(x,y,z_s)$, $k,j,s=\overline{1,\ell_1}$ and $g(\tilde{x}_p,y,z)$, $g(x,\tilde{y}_q,z)$, $g(x,y,\tilde{z}_r)$, $p,q,r=\overline{1,\ell_2}$ системах взаємно перпендикулярних прямих в області $G=[0,1]^3$. Тоді кубатурна формула $\Phi^3(\omega)$ – оптимальна за порядком точності та справедлива наступна оцінка:

$$\rho\left(I^3(\omega),\Phi^3(\omega)\right)=\frac{M}{64}\frac{1}{\ell_1^3}+M\min\left(2;\frac{M\omega}{64}\frac{1}{\ell_2^3}\right).$$

Доведення. Інтеграл $I^3(\omega)$ може бути записаний у вигляді

$$I^3(\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin\omega g(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})dxdydz=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y,z)\sin\omega Og(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left[f(x,y,z)-Jf(x,y,z)\right]\sin\omega Og(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\left[\sin\omega g(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})-\sin\omega Og(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\right]dxdydz\,,$$

тоді

$$\rho\left(I^3(\omega),\Phi^3(\omega)\right)=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin\omega g(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})dxdydz-\int_0^1\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y,z)\sin\omega Og(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})dxdydz\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)-Jf(x,y,z)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)\right|\left|\sin\omega g(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})-\sin\omega Og(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\right|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)-Jf(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+2\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)\right|\left|\sin\frac{\omega\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})-O\omega\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})}{2}\cos\frac{\omega\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})+\omega O\,\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})}{2}\right|dxdydz\le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\ell_1}\sum_{j=1}^{\ell_1}\sum_{s=1}^{\ell_1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\int_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\left|\int_{x_k}^{x}\int_{y_j}^{y}\int_{z_s}^{z} f^{(1,1,1)}(\xi,\eta,\varsigma)\,d\xi d\eta d\varsigma\right| dxdydz +$$

$$+2M\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{q=1}^{\ell_2}\sum_{r=1}^{\ell_2}\int_{\tilde{x}_{p-\frac12}}^{\tilde{x}_{p+\frac12}}\int_{\tilde{y}_{q-\frac12}}^{\tilde{y}_{q+\frac12}}\int_{\tilde{z}_{r-\frac12}}^{\tilde{z}_{r+\frac12}}\left|\sin\frac{\omega(g(x,y,z)-\omega Og(x,y,z))}{2}\right| dxdydz \le$$

$$\le M\sum_{k=1}^{\ell_1}\sum_{j=1}^{\ell_1}\sum_{s=1}^{\ell_1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}|x-x_k|dx\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}|y-y_j|dy\int_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}|z-z_s|dz +$$

$$+2M\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{q=1}^{\ell_2}\sum_{r=1}^{\ell_2}\int_{\tilde{x}_{p-\frac12}}^{\tilde{x}_{p+\frac12}}\int_{\tilde{y}_{q-\frac12}}^{\tilde{y}_{q+\frac12}}\int_{\tilde{z}_{r-\frac12}}^{\tilde{z}_{r+\frac12}}\min\left(1;\frac{\omega|g(x,y,z)-Og(x,y,z)|}{2}\right) dxdydz \le$$

$$\le M\sum_{k=1}^{\ell_1}\sum_{j=1}^{\ell_1}\sum_{s=1}^{\ell_1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}|x-x_k|dx\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}|y-y_j|dy\int_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}|z-z_j|dz +$$

$$+2M\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{q=1}^{\ell_2}\sum_{r=1}^{\ell_2}\int_{\tilde{x}_{p-\frac12}}^{\tilde{x}_{p+\frac12}}\int_{\tilde{y}_{q-\frac12}}^{\tilde{y}_{q+\frac12}}\int_{\tilde{z}_{r-\frac12}}^{\tilde{z}_{r-\frac12}}\min\left(1;\frac{\omega}{2}\left|\int_{\tilde{x}_p}^{x}\int_{\tilde{y}_s}^{y}\int_{\tilde{z}_r}^{z} g^{(1,1,1)}(\xi,\eta,\varsigma)\,d\xi d\eta d\varsigma\right|\right) dxdyd\varsigma \le$$

$$\le M\ell_1^3\frac{\Delta_1^2}{4}\frac{\Delta_1^2}{4}\frac{\Delta_1^2}{4}+2M\min\left(\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{q=1}^{\ell_2}\sum_{r=1}^{\ell_2}\int_{\tilde{x}_{p-\frac12}}^{\tilde{x}_{p+\frac12}}\int_{\tilde{y}_{q-\frac12}}^{\tilde{y}_{q+\frac12}}\int_{\tilde{z}_{r-\frac12}}^{\tilde{z}_{r+\frac12}} dxdydz,\right.$$

$$\left.\frac{M\omega}{2}\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{q=1}^{\ell_2}\sum_{r=1}^{\ell_2}\int_{\tilde{x}_{p-\frac12}}^{\tilde{x}_{p+\frac12}}\int_{\tilde{y}_{q-\frac12}}^{\tilde{y}_{q+\frac12}}\int_{\tilde{z}_{r-\frac12}}^{\tilde{z}_{r+\frac12}}|x-\tilde{x}_p||y-\tilde{y}_q||z-\tilde{z}_r|\,dxdydz\right) =$$

$$=\frac{M}{64}\Delta_1^3+2M\min\left(\ell_2^3\Delta_2^3,\frac{M\omega}{2}\ell_2^3\frac{\Delta_2^2}{4}\frac{\Delta_2^2}{4}\frac{\Delta_2^2}{4}\right)=\frac{M}{64}\Delta_1^3+M\min\left(2;\frac{M\omega}{64}\Delta_2^3\right)=$$

$$=\frac{M}{64}\frac{1}{\ell_1^3}+M\min\left(2;\frac{M\omega}{64}\frac{1}{\ell_2^3}\right).$$

За теоремою 1, при $\ell_1=\ell_2=\ell$ та $r=1$ маємо наступну оцінку наближення на класі

$$R_N\left(H^{3,1}(\mathrm{M},M),H^{3,1}(M,M),\omega\right)\ge K\max\left\{1/\ell^3,\min\left\{1,|\omega|/\ell^3\right\}\right\}.$$

Оскільки правильно

$$\rho\left(I^3(\omega),\Phi^3(\omega)\right)=\frac{M}{64}\frac{1}{\ell^3}+M\min\left(2;\frac{M\omega}{64}\frac{1}{\ell^3}\right)\le C\max\left\{1/\ell^3,\min\left\{1,|\omega|/\ell^3\right\}\right\},$$

C – константа, то кубатурна формула $\Phi^3(\omega)$ для наближеного обчислення інтегралу $I^3(\omega)$ – оптимальна за порядком точності, що доводить теорему.

4. Чисельний експеримент. В таблиці наведено результати тестування кубатурної формули $\Phi^3(\omega)$ для наближеного обчислення інтегралу $I^3(\omega)$. Інформація про функції задається їх значеннями на площинах. В таблиці результати наведено для $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$, $g(x,y,z)=\cos(x+y+z)$, при $\ell_1=\ell_2=\ell$ та для $\omega=2\pi,\ \omega=5\pi,\ \omega=10\pi$. В кожному випадку в таблиці наведено похибку $\varepsilon=\left|I^3(\omega)-\Phi^3(\omega)\right|$, отриману в результаті обчислень та її оцінку

$$E=\frac{M}{64}\frac{1}{\ell^3}+M\min\left(2;\frac{M\omega}{64}\frac{1}{\ell^3}\right).$$

Для функцій $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$, $g(x,y,z)=\cos(x+y+z)$ маємо $E=\frac{1}{64\ell^3}+\min\left(2;\frac{\omega}{64\ell^3}\right)$.

Представлені обчислення проведено в Wolfram Mathematica 10. Чисельний експеримент підтверджують теоретичні результати.

ТАБЛИЦЯ. Обчислення $I^3(\omega)$ за кубатурною формулою $\Phi^3(\omega)$

ℓ	ω	$\Phi^3(\omega)$	ε	E
5	2π	–0,005659773384241312	$1,00\cdot10^{-6}$	$9,10\cdot10^{-4}$
10	2π	–0,005657576013215849	$1,70\cdot10^{-6}$	$1,13\cdot10^{-4}$
5	5π	0,002969393727490588	$2,59\cdot10^{-5}$	$2,08\cdot10^{-3}$
10	5π	0,002951850395219029	$1,16\cdot10^{-5}$	$2,61\cdot10^{-4}$
15	5π	0.002947434378359690	$3,58\cdot10^{-6}$	$7,73\cdot10^{-5}$
20	5π	0,002932224529620142	$1,58\cdot10^{-5}$	$3,26\cdot10^{-5}$
25	5π	0,002945672856298047	$5,13\cdot10^{-6}$	$1,67\cdot10^{-5}$
5	10π	0,000356265110351913	$7,39\cdot10^{-4}$	$4,05\cdot10^{-3}$
10	10π	–0,000261065518418426	$3,62\cdot10^{-6}$	$5,06\cdot10^{-4}$
15	10π	–0,000261837407624295	$2,41\cdot10^{-7}$	$1,05\cdot10^{-4}$
20	10π	–0,000260805717278864	$1,39\cdot10^{-6}$	$6,33\cdot10^{-5}$
25	10π	–0,00026136986950217	$8,36\cdot10^{-7}$	$3,24\cdot10^{-5}$
20	20π	0,00050210512582646	$5,83\cdot10^{-4}$	$1,24\cdot10^{-4}$
25	20π	–0.00008515953820463	$1,30\cdot10^{-5}$	$6,38\cdot10^{-5}$

Висновки. В роботі представлено кубатурну формулу наближеного обчислення потрійного інтегралу від швидко осцилюючої функції загального виду. Особливість запропонованої формули це використання як дані значення функцій на системах взаємно перпендикулярних площин. Доведено, що на класі диференційовних функцій кубатурна формула наближеного обчислення потрійного інтегралу від швидко осцилюючої функції загального виду – оптимальна за порядком точності. Проведений чисельний експеримент підтвердив теоретичні твердження.

Список літератури

1. Olver S. Numerical Approximation of Highly Oscillatory Integrals. PhD thesis. Cambridge: University of Cambridge. 2008. 172 p.
2. Milovanovic G.V., Stanic M.P. Numerical Integration of Highly Oscillating Functions. Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions. 2014. P. 613–649.
3. Gao J., Condon M., Iserles A. Spectral computation of highly oscillatory integral equations in laser theory. Tech. Reports Numerical Analysis (NA2018/04). DAMPT: University of Cambridge, 2018. 30 p.
4. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання. Київ: Наук. думка, 2012. 400 с.
5. Sergienko I.V., Lytvyn O.M. New Information Operators in Mathematical Modeling (A Review). *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. **54** (1). P. 21–30. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0004-5
6. Sergienko I.V., Zadiraka V.K., Lytvyn O.M. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer. 2021. 378 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90908-6
7. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. Київ: Наук. думка, 2017. 336 с.
8. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflatation. *Journal of Automation and Information Science.* 2012. **44** (3). P. 45–56. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v44.i3.40
9. Mezhuyev V.I., Lytvyn O.M., Nechuiviter O.P., Pershyna Y.I., Lytvyn O.O., Keita K.V. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions. U.P.B. Sci. Bull., Series A. 2017. **80** (30). P. 169–182.
10. Nechuiviter O.P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies. *Information Technologies and Learning Tools*. 2021. **2** (82). P. 282–296.
11. Lytvyn O.M., Nechuiviter O.P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflatation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **50** (3). P. 410–418. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9629-1
12. Lytvyn O.M., Nechuiviter O.P., Pershyna I.I., Mezhuyev V.I. Input Information in the Approximate Calculation of Two-Dimensional Integral from Highly Oscillating Functions (Irregular Case). Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information : XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information : proceedings. Kyiv, 2019. P. 365–373. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_36
13. Нечуйвітер О.П., Каргапольцева Г.В., Дараган К.В. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула наближеного обчислення подвійного інтегралу від швидкоосцилюючих функцій загального виду. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2019. **19**. С. 91–97. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2019-19.91-97
14. Nechuiviter O.P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2020. **4**. P. 65–73. https://doi.org/10.15588/1607-3274-2020-4-7
15. Нечуйвітер О.П., Іванов С.С., Ковальчук К.Г. Оптимальне інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального виду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. **33.** P. 68–72. https://doi.org/10.15407/fmmit2021.33.068

Одержано 08.08.2023

Нечуйвітер Олеся Петрівна,
доктор фізико-математичних наук, професор
Українсько-інженерно-педагогічна академія, Харків,
https://orcid.org/0000-0003-2775-8471
olesia.nechuiviter@gmail.com

Іванов Сергій Сергійович,
аспірант Українсько-інженерно-педагогічна академія, Харків.
https://orcid.org/0009-0006-0669-6186
ivanov.linsholm@gmail.com

УДК 519.644

О.П. Нечуйвітер *, С.С. Іванов *

Оптимальна за порядком точності кубатурна формула наближеного обчислення потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду

Українсько-інженерно-педагогічна академія, Харків
* *Листування:* olesia.nechuiviter@gmail.com

Вступ. Швидкий розвиток цифрових технологій спонукає науковців створювати нові або вдосконалювати існуючі математичні моделі технічних процесів. На часі є розробка математичних моделей з різними типами використання даних. В задачах цифрової обробки сигналів та зображень наближене обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій з використанням нових інформаційних операторів дозволяє будувати кубатурні формули з використанням різних типів задання інформації, тобто як дані можуть бути значення функцій на площинах, на лініях та в точках.

Мета роботи. Представити та дослідити оптимальну за порядком точності кубатурну формулу наближеного обчислення потрійного інтегралу від швидко осцилюючих функцій загального виду на класі диференційовних функцій. Інформація про функції має задаватися слідами на системах взаємно перпендикулярних площин.

Результати. Продовжено дослідження задач цифрової обробки сигналів та зображень на прикладі чисельного інтегрування потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду.

Побудована кубатурна формула, яка як вхідна інформація використовує значення функцій на системах взаємно перпендикулярних площин.

Основна увага приділена отриманню оцінок похибок. Доведено, що запропонована кубатурна формула наближеного обчислення потрійного інтегралу від швидко осцилюючих функцій загального виду є оптимальною за порядком точності на класі диференційовних функцій. Проведений чисельний експеримент підтвердив теоретичні результати.

Висновки. Отримані результати дозволяють будувати нові та удосконалювати існуючі математичні моделі процесів при різних типах вхідної інформації. Потужним інструментом при розробці таких моделей є нові інформаційні оператори. Зокрема, створені кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних. Формули в своїй побудові використовують сліди функції на площинах, лініях, точках. В даній роботі побудована та досліджена на класі диференційовних функцій оптимальна за порядком точності кубатурна формула наближеного обчислення потрійного інтегралу від швидко осцилюючої функції загального виду. Особливість запропонованої формули – використання як дані значень функцій на системах взаємно перпендикулярних площин.

Ключові слова: інтеграли від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних, кубатурні формули, нові інформаційні оператори, цифрова обробка сигналів та зображень.

UDC 519.644

Olesia Nechuiviter *, Serhii Ivanov *

Optimal by the Order of Accuracy Cubature Formula for the Approximate Calculation of Triple Integrals from Fast Oscillating Functions in General View

Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, Kharkiv
* *Correspondence:* olesia.nechuiviter@gmail.com

Introduction. The rapid development of digital technologies encourages scientists to create new or improve existing mathematical models of technical processes. It is time to develop mathematical models with different types of data. In the tasks of digital signal and image processing, the approximate calculation of integrals from rapidly oscillating functions using new information operators makes it possible to build cubature formulas using different types of information: the values of functions on planes, lines and points can be used as data.

The purpose is to present and investigate the optimal cubature formula for the approximate calculation of the triple integral from rapidly oscillating functions in the general form on the class of differential functions. Information about functions are traces on systems of mutually perpendicular planes.

Results. The study of the problems of digital signal and image processing continued using the example of numerical integration of triple integrals from rapidly oscillating functions in the general form.

The values of functions on systems of mutually perpendicular planes are using for constructed cubature formula.

The main attention in the research focuses on obtaining the estimations of errors. Proposed cubature formula for the approximate calculation of the triple integral from rapidly oscillating functions in general view is optimal in order of accuracy on the class of differential functions. The conducted numerical experiment confirmed the theoretical results.

Conclusions. The obtained results make it possible to build new and improve existing mathematical models of processes with different types of input information. New information operators are a powerful tool in the development of such models. Cubature formulas for the approximate calculation of integrals from rapidly oscillating functions of many variables have been created. In the construction of the formulas traces of the function on planes, lines, and points are used. Formulas in their construction use function traces on planes, lines, and points. In this work, a cubature formula for the approximate calculation of the triple integral from a rapidly oscillating function in the general form, which is optimal in order of accuracy, is constructed and investigated on the class of differentiable functions. A feature of the proposed formula is the use of values of functions on systems of mutually perpendicular planes as data.

Keywords: integrals of rapidly oscillating functions of many variables, cubature formulas, new information operators, digital signal and image processing.