КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.8 DOI:10.34229/2707-451X.23.4.5

О.А. БЕРЕЗОВСЬКИЙ, О.П. ЛИХОВИД, М.Г. СТЕЦЮК

ПАРАЛЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ЗБАЛАНСОВАНОГО РОЗРІДЖЕНОГО ПАКУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДІВ

Розглядається задача збалансованого розрідженого пакування заданого набору однаково орієнтованих прямокутних паралелепіпедів у прямокутний паралелепіпед мінімального об'єму. Описано паралельний алгоритм розв'язування цієї задачі, який базується на її зведенні за допомогою штрафних функцій до задачі безумовної недиференційованої оптимізації, для знаходження розв'язку якої застосовується мультистарт у поєднанні з r-алгоритмом для пошуку локальних мінімумів. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: *збалансоване розріджене пакування, метод мультистарту, штрафна функція, r-алгоритм, процедура "Master-Slave", чисельні експерименти.*

Вступ. Різновиди задачі пакування прямокутних паралелепіпедів мають широке практичне застосування у різних сферах діяльності, наприклад, при оптимальному заповненні контейнерів, при проєктуванні та компонуванні найрізноманітніших технологічних об'єктів та систем, створенні резервних копій на знімних носіях, при оптимізації зберігання, захисту та транспортування товарів, в адитивному виробництві тощо. У загальному випадку ці задачі належать до NP-складних задач у теорії складності обчислень, що з урахуванням важливості їхнього прикладного аспекту, підтримує постійний інтерес дослідників до вирішення питань побудови нових математичних моделей для різних постановок задач пакування та розробки ефективних алгоритмів їх розв'язання. Підвищення конкурентноздатності алгоритмів розв'язання подібних задач пов'язано як з новими теоретичними результатами, так і з використанням нових (суперкомп'ютерних, грід- і хмарних) технологій.

Цій тематиці присвячено велику кількість публікацій. Серед них можна згадати, наприклад, наступні: в [1] наведено стислий огляд алгоритмів для пакування прямокутників, в [2] описано рекурсивний метод пакування паралелепіпедів, в [3] пропонується алгоритм пакування орієнтованих паралелепіпедів з можливістю ортогонального повороту.

Дана робота продовжує дослідження за даною тематикою і присвячена задачі збалансованого розрідженого пакування заданого набору однаково орієнтованих прямокутних паралелепіпедів різних розмірів у прямокутний паралелепіпед мінімального об'єму. Далі представлено математичну модель для цієї задачі пакування та паралельний алгоритм для її розв'язування. Цей алгоритм базується на зведенні за допомогою штрафних функцій початкової задачі до задачі безумовної оптимізації, для розв'язування якої застосовується метод мультистарту [4, 5], в рамках якого для пошуку локальних мінімумів з набору згенерованих початкових точок використовується r-алгоритм [6].

Формулювання оптимізаційної задачі

Нехай в n-вимірному просторі задано сімейство прямокутних паралелепіпедів C_i, $i=\overline{1,m}$, для кожного з яких відомі довжини ребер a_{ik}, $k=\overline{1,n}$, і вага w_i, $i=\overline{1,m}$. Умовою задачі передбачається, що всі прямокутні паралелепіпеди однаково орієнтовані, тобто їх сторони паралельні (не обмежуючи загальності, будемо вважати, їх паралельними осям координат). Також будемо вважати, що центр ваги паралелепіпеда C_i знаходиться у його центрі. Збалансованим розрідженим пакуванням сімейства прямокутних паралелепіпедів C_i, $i=\overline{1,m}$, у прямокутний паралелепіпед C_0 назвемо таке їх пакування, щоб об'єм паралелепіпеда C_0 був мінімальним, центр ваги сімейства паралелепіпедів C_i, $i=\overline{1,m}$, співпадав із центром зовнішнього паралелепіпеда C_0, а відстані між паралелепіпедами C_i та відстані від них до зовнішнього паралелепіпеда C_0 були не менші за наперед задані величини (допустимі відстані в даній постановці задачі визначаються метрикою $d(y,z)=\max\limits_{k=\overline{1,n}}|y_k-z_k|$, $y\in R^n$, $z\in R^n$).

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що центр паралелепіпеда C_0 знаходиться на початку системи координат. Введемо такі позначення:

$x_i\in R^n$, $i=\overline{1,m}$, – невідомі центри паралелепіпедів C_i, $i=\overline{1,m}$, які задають їхнє розташування у просторі;

a_{0k}, $k=\overline{1,n}$, – невідомі довжини ребер паралелепіпеда C_0;

d_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m}$, $i\neq j$, – відстань між двома паралелепіпедами C_i та C_j, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m}$, $i\neq j$;

d_i, $i=\overline{1,m}$, – відстань від паралелепіпеда C_i, $i=\overline{1,m}$, до зовнішнього паралелепіпеда C_0.

Тоді знаходженню збалансованого розрідженого пакування сімейства прямокутних паралелепіпедів C_i, $i=\overline{1,m}$, у прямокутний паралелепіпед C_0 відповідає багатоекстремальна задача нелінійного програмування:

$$f^*=\min_{a_0,x}\prod_{k=1}^{n}a_{0k}, \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\max\{-x_{ik}+a_{ik}/2-a_{0k}/2+d_i,\ x_{ik}+a_{ik}/2-a_{0k}/2+d_i\}\le 0,\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\min_{k=\overline{1,n}}\{x_{ik}-x_{jk}+a_{ik}/2+a_{jk}/2+d_{ij},\ x_{jk}-x_{ik}+a_{ik}/2+a_{jk}/2+d_{ij}\}\le 0,\ 1\le i<j\le m, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m}w_i x_{ik}=0,\ k=\overline{1,n}, \tag{4}$$

де $x_i=(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in})^T$, $i=\overline{1,m}$, і $x=(x_1^T,x_2^T,\dots,x_m^T)^T$.

Цільова функція (1) є нелінійною функцією і пов'язана з мінімізацією об'єму паралелепіпеда C_0. Обмеження (2) означають, що кожний паралелепіпед C_i знаходиться усередині паралелепіпеда C_0, а відстань між ним і зовнішнім паралелепіпедом C_0 є не меншою за наперед задану величину d_i, $i=\overline{1,m}$. Обмеження (3) гарантують, що ніякі два паралелепіпеди із сімейства

C_i, $i=\overline{1,m}$, не перетинаються (не мають загальних внутрішніх точок), а відстань між ними (у метриці $d(y,z)=\max\limits_{k=\overline{1,n}}|y_k-z_k|$, $y\in R^n$, $z\in R^n$) є не меншою за наперед задану величину. Зміст цих обмежень полягає у наступному: для кожної пари паралелепіпедів i і j, $1\le i<j\le m$, хоча б по одній з координат k, $k=\overline{1,n}$, має виконуватися одна з двох нерівностей:

$$x_{ik}-x_{jk}+a_{ik}/2+a_{jk}/2\le 0,$$

$$x_{jk}-x_{ik}+a_{ik}/2+a_{jk}/2\le 0,$$

(у випадку, якщо справедлива перша нерівність, то паралелепіпед i лежить лівіше паралелепіпед j по k-ій координатній осі, а якщо справедлива друга нерівність – правіше). Лінійні обмеження (4) відповідають умові, що центр ваги сімейства паралелепіпедів C_i, $i=\overline{1,m}$, локалізований на початку координат.

Алгоритм пошуку найкращого розв'язку

Розглянемо задачу безумовної мінімізації негладкої функції, яка отримана з початкової задачі (1)–(4) за допомогою використання негладких штрафів у вигляді функцій максимуму:

$$\min_{a_0,x}\{f(a_0,x)=\prod_{k=1}^{n}a_{0k}+\Phi_P(a_0,x)\},\qquad(5)$$

де штрафна функція $\Phi_P(a_0,x)$ має вигляд

$$\Phi_P(a_0,x)=P_1F_1(a_0,x)+P_2F_2(x)+P_3F_3(x).\qquad(6)$$

$P=\{P_1,P_2,P_3\}$, де P_1, P_2 і P_3 – штрафні коефіцієнти, а функції $F_1(a_0,x)$, $F_2(x)$ і $F_3(x)$ визначаються так:

$$F_1(a_0,x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\max\{0,-x_{ik}+a_{ik}/2-a_{0k}/2+d_i,\ x_{ik}+a_{ik}/2-a_{0k}/2+d_i\},\qquad(7)$$

$$F_2(a_0,x)=\sum_{1\le i<j\le m}\max\{0,\min_{k=\overline{1,n}}\{x_{ik}-x_{jk}+a_{ik}/2+a_{jk}/2+d_i,x_{jk}-x_{ik}+a_{ik}/2+a_{jk}/2+d_i\}\},\qquad(8)$$

$$F_3(x)=\sum_{k=1}^{n}\max\{0,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_{ik}-\Delta x_k,-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_{ik}-\Delta x_k\},\qquad(9)$$

де Δx_k, $k=\overline{1,n}$, – задані допуски на відхилення координат центру ваги сімейства паралелепіпедів від початку координат.

Знаходження локального мінімуму задачі (1)–(4) можна замінити на пошук локального мінімуму задачі (5)–(9), яка є задачею безумовної мінімізації багатоекстремальної негладкої функції $f(a_0,x)$. Вибір штрафних коефіцієнтів P_1, P_2 і P_3 дозволяє враховувати точність виконання обмежень (2)–(4). Коефіцієнт P_1 відповідає за «сумарне порушення» обмежень (2), коефіцієнт P_2 – за «сумарне порушення» обмежень (3), а коефіцієнт P_3 – за «сумарне порушення» обмежень (4).

Алгоритм пошуку найкращого розв'язку задачі (1)–(4) базується на методі мультистарту [4, 5] з випадковим (за рівномірним розподілом) вибором стартових точок і модифікації *r*-алгоритму Шора [6] для пошуку локальних мінімумів функції $f(a_0,x)$. Згідно роботам (наприклад, [4, 5, 7]) даний підхід на практиці досить ефективний для подібних задач. Цей алгоритм не вимагає, щоб стартові точки були допустимими для задачі (1)–(4). Його можна використовувати й при відсутності обмежень на центр ваги системи паралелепіпедів. Для цього досить покласти $P_3 = 0$, що рівносильно тому, що із задачі (1)–(4) виключаються обмеження (4).

Алгоритм полягає у наступному. Нехай *ntest* – кількість стартових точок, які генеруються за допомогою датчика рівномірного розподілу в заданій апріорі області початкової локалізації розв'язку задачі (1)–(4), наприклад, у кубі зі стороною $a_0^{\max} = \sum_{i=1}^{m} \max_{1 \le k \le n} \{a_{ik}\} + (m+1) \max_{\substack{1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le m}} \{d_i, d_{ij}\}$. Пошук локального мінімуму функції $f(a_0, x)$ з кожної стартової точки здійснюється за допомогою модифікації r-алгоритму з постійним коефіцієнтом розтягу простору й адаптивним регулюванням кроку [6]. Найкращий локальний мінімум функції $f(a_0, x)$, у якому реалізується близьке до нуля значення штрафної функції $\Phi_P(a_0, x)$, приймаємо за розв'язок задачі (1)–(4). Йому відповідає найкраще значення параметрів a_0^{up} паралелепіпеда C_0 і відповідні вектори центрів паралелепіпедів C_i, $i = \overline{1, m}$: $x^{up} = ((x_1^{up})^T, (x_2^{up})^T, \ldots, (x_m^{up})^T)^T$.

Застосування мультистарту дозволяє розпаралелити пошук локальних екстремумів з різних стартових точок. Реалізація паралельного алгоритму використовує процедуру "Master-Slave" на $(p+1)$ процесорах. Один з них вибирається «провідним» (Master), а інші p – «підпорядкованими» (Slave). Ця процедура апробована в [8, 9].

На початку обчислень в Master-процесорі випадковим чином генеруються p стартових точок у кубі зі стороною $a_0^{\max} = \sum_{i=1}^{m} \max_{1 \le k \le n} \{a_{ik}\} + (m+1) \max_{\substack{1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le m}} \{d_i, d_{ij}\}$ і пересилаються в Slave-процесори. Slave-процесор займається пошуком локального мінімуму функції $f(a_0, x)$ для отриманої ним стартової точки. Як тільки r-алгоритм закінчує роботу на якому-небудь Slave-процесорі, то результат пошуку передається в Master-процесор. Якщо при цьому знайдено локальний мінімум задачі (1)–(4), то значення об'єму зовнішнього паралелепіпеда порівнюється з найкращим зі знайдених до цього моменту значенням. Якщо воно менше за рекодне, тоді відповідний вектор a_0 стає новим рекордом a_0^{up}, запам'ятовуються відповідні йому значення координат центрів паралелепіпедів $x^{up} = ((x_1^{up})^T, (x_2^{up})^T, \ldots, (x_m^{up})^T)^T$. Процес завершується, якщо було перевищено задану кількість стартових точок або замовлений час.

Чисельні експерименти

Вищевикладений алгоритм було програмно реалізовано для випадку тривимірного простору ($n = 3$). Програмна реалізація виконана мовою програмування С++. Як генератор псевдовипадкових чисел програма використовує стандартну функцію **rand** з бібліотеки С++. Пошук локальних мінімумів здійснюється модулем **ralgb5**, який відповідає octave-коду модифікації r-алгоритму з [10, стор. 384–385]. Програма призначена для роботи на кластері із середовищем MPI під керуванням операційної системи Linux. Вона може працювати як на одному процесорі, так і на багатьох паралельних процесорах.

Для перевірки ефективності алгоритму були проведені чисельні експерименти. У першому експерименті порівняння проводились з результатами з роботи [3]. Далі наведено результати обчислень для задачі пакування 4 прямокутних паралелепіпедів з цієї роботи. Лінійні розміри прямокутних паралелепіпедів для цього тестового прикладу наведено в табл. 1. Інші параметри мали наступні значення: $d_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots 4$, $d_{ij} = 0,\ 1 \le i < j \le 4$, $w_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots 4$, $\Delta x_k = 0.000001$, $k = 1, 2, 3$.

ТАБЛИЦЯ 1. Вхідні дані для прикладу з роботи [3]

#	*a*	*b*	*h*
1	8	25	6
2	20	10	5
3	7	16	3
4	12	15	6

Для цього тестового прикладу розроблений алгоритм за 24317 ітерацій знайшов глобальний розв'язок, який показано на рис. 1. Знайдені значення об'єму зовнішнього паралелепіпеду та значення його довжини, ширини та висоти, що відповідно дорівнювали $f^* = 4368$, 28, 26 та 6 співпали з наведеними в [3].

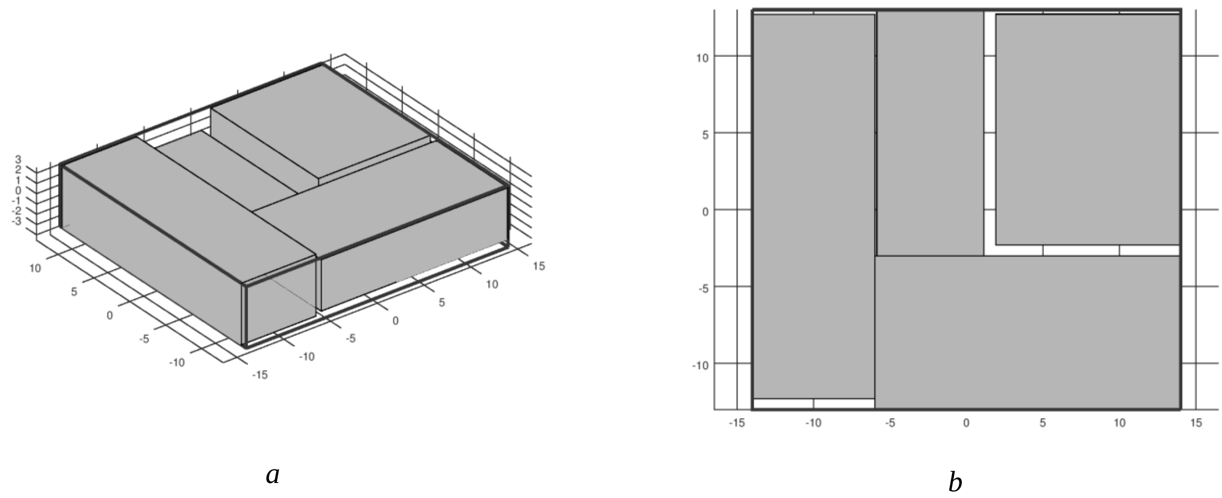


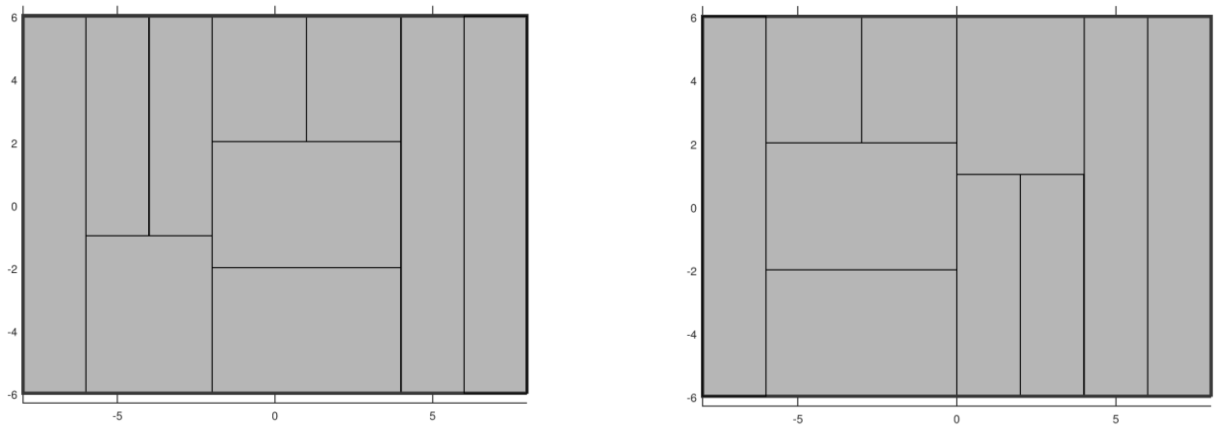
РИС. 1. Розміщення 4 паралелепіпедів для прикладу з роботи [3]

Другий тестовий приклад було згенеровано наступним чином. Прямокутник 16x12 було довільно поділено на десять прямокутників (при цьому сума площ прямокутників дорівнює площі вихідного прямокутника). На основі цих прямокутників будуються десять прямокутних паралелепіпедів з однаковою висотою 1.5. Для задачі (1)–(4) пакування згенерованих таким чином паралелепіпедів глобальний екстремум відомий – мінімальний об'єм прямокутного паралелепіпеду, який містить цей набір паралелепіпедів, дорівнює сумі їхніх об'ємів ($f^* = 288$), і досягається принаймі у точці, яка відповідає способу побудови цього набору паралелепіпедів. Лінійні розміри прямокутних паралелепіпедів для цього тестового прикладу наведено в табл. 2. Інші параметри мали наступні значення: $d_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots 4$, $d_{ij} = 0,\ 1 \le i < j \le 10$, $w_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots 10$, $\Delta x_k = 0.000001$, $k = 1, 2, 3$.

ТАБЛИЦЯ 2. Вхідні дані для другого тестового прикладу

#	*a*	*b*	*h*
1	4	5	1.5
2	2	7	1.5
3	2	7	1.5
4	6	4	1.5
5	6	4	1.5
6	3	4	1.5
7	3	4	1.5
8	2	12	1.5
9	2	12	1.5
10	2	12	1.5

Для цього тестового прикладу розроблений алгоритм за 20293 ітерацій знайшов перший глобальний розв'язок, а за 37839 ітерацій знайшов другий глобальний розв'язок, які показані на рис. 2. Знайдені значення об’єму зовнішнього паралелепіпеду та значення його довжини, ширини та висоти співпали з відомими значеннями.



a *b*

РИС. 2. Два глобальних розв'язки для другого тестового прикладу

Проведені чисельні експерименти показали ефективність описаного в роботі алгоритму для знаходження покращеного збалансованого розрідженого пакування прямокутних паралелепіпедів за прийнятний час під час розв’язання практичних задач.

Висновки. У роботі розглядається математична модель для знаходження задачі збалансованого розрідженого пакування заданого набору однаково орієнтованих прямокутних паралелепіпедів різних розмірів у прямокутний паралелепіпед мінімального об’єму. Досліджувана задача багатоекстремальна і відноситься до класу NP-складних. Для пошуку найкращого допустимого розв'язку запропоновано використання паралельного алгоритму, який базується на зведенні за допомогою штрафних функцій початкової задачі до задачі безумовної оптимізації за допомогою штрафних функцій у вигляді функцій максимуму, для розв’язування якої застосовується метод мультистарту. В рамках цього методу для пошуку локальних мінімумів з набору згенерованих початкових точок у статті пропонується використовувати *r*-алгоритм, який зарекомендував себе на практиці як ефективний засіб при роботі з яружними недиференційованими функціями.

Алгоритм було програмно реалізовано на мові С++ у середовищі паралельного програмування MPI. Проведені чисельні експерименти показали його практичну ефективність.

Список літератури

1. Hopper E., Turton B.C.H. A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2D strip packing problems. *Artificial Intelligence Review.* 2001. **16**. P. 257–300. https://doi.org/10.1023/A:1012590107280
2. Lins L., Lins S., Morabito R. An *n*-tet graph approach for non-guillotine packings of *n*-dimensional boxes into an n-container. *European Journal of Operational Research*. 2002. **141** (2). P. 421–439. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00135-2
3. Hu N.-Z., Li H.-L., Tsai J.-F. Solving Packing Problems by a Distributed Global Optimization Algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*. 2012. Vol. 2012, Art. ID 931092. 13 p. https://doi.org/10.1155/2012/931092
4. Стецюк П.И., Бортис Г., Эмменеггер Ж.-Ф. и др. Институциональные и технологические изменения в странах с рыночной и переходной экономикой. К.: Видавничий дім "Києво-Могилянська академія", 2015. 336 с.
5. Stetsyuk P.I., Romanova T.E., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem. *Optimization Letters.* 2016. **10** (6). P. 1347–1360. https://doi.org/10.1007/s11590-015-0937-9
6. Shor N.Z. Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. Boston/London/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 394 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6015-6
7. Стецюк П.І., Березовський О.А., Лиховид О.П., Стецюк М.Г. Математичні моделі та алгоритми оптимальної упаковки куль та кубів у сферичний та кубічний контейнери. *International Scientific Technical Journal" Problems of Control and Informatics"*. 2022. № 3. С. 87–100.
8. Лиховид А.П. О реализации параллельного алгоритма для решения задач равновесной упаковки. *Теорія оптимальних рішень*. 2015. С. 154–159. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/112413
9. Лиховид О.П., Стецюк П.І. Комп'ютерна програма “Паралельна програма “Збалансована упаковка кругів з заданими допустимими відстанями між ними”. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №109298. Україна. Національний орган інтелектуальної власності державне підприємство Український інститут інтелектуальної власності (Укрпатент). Дата реєстрації 10.11.2021. 40 с.
10. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и *r*–алгоритмы. Кишинев: Эврика, 2014. 488 с.

Одержано 29.09.2023

Березовський Олег Анатолійович,
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
o.a.berezovskyi@gmail.com
orcid.org/0000-0003-0932-0265

Лиховид Олексій Петрович,
науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
o.lykhovyd@gmail.com

Стецюк Марія Григорівна,
інженер-математик
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
danilyukm5@gmail.com

УДК 519.8

О.А. Березовський *, О.П. Лиховид, М.Г. Стецюк

Паралельний алгоритм збалансованого розрідженого пакування прямокутних паралелепіпедів

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ
* *Листування: o.a.berezovskyi@gmail.com*

Вступ. Різновиди задачі пакування прямокутних паралелепіпедів мають широке практичне застосування у різних сферах діяльності, наприклад, при оптимальному заповненні контейнерів, при проєктуванні та компонуванні найрізноманітніших технологічних об'єктів та систем, створенні резервних копій на знімних носіях, при оптимізації зберігання, захисту та транспортування товарів, у адитивному виробництві тощо. Дана робота продовжує дослідження за даною тематикою і присвячена задачі збалансованого розрідженого пакування заданого набору однаково орієнтованих прямокутних паралелепіпедів різних розмірів у прямокутний паралелепіпед мінімального об’єму. В ній представлено математичну модель для цієї задачі пакування та паралельний алгоритм для її розв’язування. Цей алгоритм базується на зведенні за допомогою штрафних функцій початкової задачі до задачі безумовної оптимізації, для розв’язування якої застосовується метод мультистарту, в рамках якого для пошуку локальних мінімумів з набору згенерованих початкових точок використовується *r*-алгоритм.

Мета роботи. Побудова математичної моделі та розроблення алгоритму розв’язання задачі збалансованого розрідженого пакування заданого набору однаково орієнтованих прямокутних паралелепіпедів у прямокутний паралелепіпед мінімального об’єму.

Результати. Представлено математичну модель та паралельний алгоритм для збалансованого розрідженого пакування однаково орієнтованих прямокутних паралелепіпедів у прямокутний паралелепіпед мінімального об’єму. Алгоритм базується на зведенні задачі за допомогою штрафних функцій до задачі безумовної недиференційованої оптимізації, для знаходження розв’язку якої застосовується метод мультистарту у поєднанні з *r*-алгоритмом для пошуку локальних мінімумів. Наведено результати чисельних експериментів.

Висновки. Застосування описаного в роботі алгоритму на основі методів негладкої оптимізації дозволяє покращити результати збалансованого розрідженого пакування прямокутних паралелепіпедів за прийнятний час. Проведені чисельні експерименти показали ефективність алгоритму на практиці.

Ключові слова: збалансоване розріджене пакування, метод мультистарту, *r*-алгоритм, штрафна функція, процедура “Master-Slave”, чисельні експерименти.

UDC 519.8

Oleg Berezovskyi *, Oleksii Lykhovyd, Maria Stetsyuk

Parallel Algorithm of Balanced Sparse Packing of Rectangular Parallelepipeds

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
* *Correspondence: o.a.berezovskyi@gmail.com*

Introduction. Varieties of the problem of packing of rectangular parallelepipeds have a wide practical application in various fields of activity, for example, in the optimal filling of containers, in the design and layout of a wide variety of technological objects and systems, in the creation of backup copies on removable media, in the optimization of storage, protection and transportation of goods, in additive manufacturing, etc. This work continues research on this topic and is devoted to the problem of balanced sparse packing of a given set of identically oriented rectangular parallelepipeds of different sizes into a rectangular parallelepiped of minimum volume. It presents a mathematical model for this packing problem and a parallel algorithm for solving it.

This algorithm is based on the reduction of the original problem to an unconditional optimization problem using penalty functions, which is solved by the multistart method, in which *r*-algorithm is used to find local minima from the set of generated starting points.

The purpose. Construction of a mathematical model and development of an algorithm for solving the problem of balanced sparse packing of a given set of identically oriented rectangular parallelepipeds into a rectangular parallelepiped of minimum volume.

Results. A mathematical model and a parallel algorithm for balanced sparse packing of identically oriented rectangular parallelepipeds into a rectangular parallelepiped of minimum volume are presented. The algorithm is based on reducing the problem with the help of penalty functions to an unconditional nondifferentiable optimization problem, for finding the solution of which multistart method is used in combination with *r*-algorithm for finding local minima. The results of numerical experiments are given.

Conclusions. The application of the algorithm described in the work based on non-smooth optimization methods allows to improve the results of balanced sparse packing of rectangular parallelepipeds in an acceptable time. Numerical experiments showed effectiveness of the algorithm in practice.

Keywords: balanced sparse packing, multistart method, *r*-algorithm, penalty function, "Master-Slave" procedure, numerical experiments.