

## ПАКУВАННЯ М'ЯКИХ БАГАТОКУТНИКІВ У ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ МІНІМАЛЬНОЇ ВИСОТИ

Задачі пакування та розкрою достатньо вивчені та мають широкий спектр практичних застосувань (див., наприклад, [1–3]). Розміщення об'єктів, що мають змінну просторову форму, у подальшому, м'яких об'єктів, використовується в біології [4], механіці [5], матеріалознавстві [6]. Пакування м'яких прямокутників можна знайти в землевідведенні [7] та логістиці [8]. Пакування м'яких трикутників виникає при генерації сіток для кінцево-елементного аналізу [9].

Інтерес до цих проблем також обумовлений моделюванням структур пористих середовищ під тиском [10–12]. Елементи пористих середовищ можуть деформуватися під дією зовнішньої сили, однак маса кожної частинки залишається незмінною. Це відповідає збереженню площі для двовимірного випадку. Пакування м'яких еліпсів розглянуто у роботі [13] для створення тестових моделей штучних цифрових кернів.

Задачам пакування багатокутників, що мають фіксовану просторову форму, присвячено багато публікацій (див., наприклад, [14–19]). У статті [20] розглянуто задачу розміщення м'яких трикутників та п'ятикутників у крузі мінімального радіуса та квадраті мінімального периметру.

В даній роботі досліджено задачу пакування опуклих багатокутників, що мають змінну просторову форму (відповідно до змінного коефіцієнту розтягування) та змінні параметри розміщення у прямокутній області мінімальної висоти.

### Постановка задачі

Нехай задано множина опуклих багатокутників  $K_i$ ,  $i \in I_n = \{1, \dots, n\}$ , які визначені вершинами  $\tilde{v}_{ik} = (\tilde{x}_{ik}, \tilde{y}_{ik})$ ,  $k = 1, \dots, m_i$ . Позначимо змінні параметри розміщення багатокутників  $P_i$  через  $u_i = (v_i, \theta_i)$ , де  $v_i = (x_i, y_i)$  та  $\theta_i$  – змінні параметри трансляції та обертання.

У подальшому з кожним багатокутником  $K_i$  асоціюємо круг  $S_i$  радіуса  $r_i$  з центром  $v_i = (x_i, y_i)$ ,  $i \in I_n$ .

*Розглянуто задачу пакування опуклих багатокутників у прямокутній області мінімальної висоти, що мотивована моделюванням пористих середовищ під тиском. Форма багатокутників може змінюватися відповідно до змінного коефіцієнту розтягування (м'які багатокутники). Багатокутники повинні бути повністю розміщені у контейнері та не перетинатися при вільних трансляціях, неперервних поворотах і перетвореннях розтягування. Умови неперетину та включення для м'яких багатокутників змінної форми описано за допомогою методу  $\rho$ -функцій. Задачу пакування подано у вигляді моделі нелінійного програмування. Запропоновано метод розв'язання, заснований на стратегії мултистарту, алгоритмі побудови допустимих стартових розміщень та ітераційної процедури декомпозиції. Надано числові приклади.*

**Ключові слова:** пакування, м'які багатокутники, прямокутна область, квазі- $\rho$ -функція, оптимізація, алгоритм декомпозиції.

Визначаємо, що центр власної системи координат багатокутника  $K_i$  співпадає з центром  $v_i = (x_i, y_i)$  описаного кола  $frS_i$  ( $fr(\bullet)$  – границя множини  $(\bullet)$ ).

Нехай  $\mu_i$  – змінний коефіцієнт горизонтального розтягування, а  $1/\mu_i$  – змінний коефіцієнт вертикального стиснення багатокутника  $K_i$ , де  $1 \leq \mu_i \leq \mu^+$ ,  $\mu^+$  є заданим параметром.

Кожен багатокутник  $K_i$ ,  $i \in I_n$ , що обертається на кут  $\theta_i$ , зміщується на вектор  $v_i$  та розтягується на  $\mu_i$ , описується як  $K_i(u_i, \mu_i) = \{p \in R^2 : p = v_i + A(\theta_i) \cdot M(\mu_i) \cdot p^0, \forall p^0 \in K_i^0\}$ .

Тут  $K_i^0$  позначає неперенесений і неповернутий багатокутник оригінальних розмірів ( $x_i^0 = 0, y_i^0 = 0, \theta_i^0 = 0, \mu_i = 1$ ),  $A(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$  – матриця повороту,  $M(\mu_i) = \begin{pmatrix} \mu_i & 0 \\ 0 & 1/\mu_i \end{pmatrix}$  – матриця розтягування. Зауважимо, що матриця  $M(\mu_i)$  забезпечує горизонтальне розтягування на  $\mu_i$ , а вертикальне звуження на  $1/\mu_i$  для кожного рухомого багатокутника  $K_i(u_i, \mu_i)$ .

При цьому кожен багатокутник  $K_i(u_i, \mu_i)$  зберігає свою площу та опуклість під час руху та розтягування для усіх  $i \in I_n$ . Тобто площа багатокутника  $K_i(u_i, \mu_i)$  зберігається при перетворенні розтягування і дорівнює площі вихідного багатокутника  $K_i^0$ . У подальшому багатокутник  $K_i(u_i, \mu_i)$  – м'який.

Нехай багатокутник  $K_i$  задано його вершинами  $\tilde{v}_{ik} = (\tilde{x}_{ik}, \tilde{y}_{ik})$ ,  $k = 1, \dots, m$ , тоді як рухомий опуклий м'який багатокутник  $K_i(u_i, \mu_i)$  задано впорядкованою сукупністю вершин  $(\mu_i x_{ik}, (1/\mu_i) \cdot y_{ik})$ ,  $k = 1, \dots, m$  зі змінним параметром  $1 \leq \mu_i \leq \mu^+$  для попередньо визначеного параметра  $\mu^+$ .

Нехай  $\Omega(h) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h\}$  – прямокутна область зі змінним параметром  $h$ .

*Пакування м'яких багатокутників* (PSP – Packing Soft Polygons). Розмістити задану множину м'яких багатокутників  $K_i(u_i, \mu_i)$ ,  $i \in I_n$ , у прямокутній області  $\Omega(h)$  мінімальної висоти для заздалегідь визначеного параметра  $\mu^+$  за таких умов: умови неперетину –  $\text{int } K_i(u_i, \mu_i) \cap \text{int } K_j(u_j, \mu_j) = \emptyset$  для  $i > j \in I_n$ , та умови включення –  $K_i(u_i, \mu_i) \subset \Omega(h)$  для  $i \in I_n$ .

### Математичне моделювання

Для аналітичного опису умов розміщення використовуються  $\phi$ -функції та квазі- $\phi$ -функції [21]. Ці геометричні засоби дозволяють моделювати відношення м'яких багатокутників, що неперечно рухаються та розтягуються.

Нехай  $L(\tau_{ij}) = \{(x, y) : \psi_{ij} = \cos \phi_{ij} \cdot x + \sin \phi_{ij} \cdot y + \gamma_{ij} \leq 0\}$  – півплощина, де  $\tau_{ij} = (\phi_{ij}, \gamma_{ij}) \in R^2$  вектор змінних параметрів.

Квазі- $\phi$ -функція для м'яких багатокутників  $K_i(u_i, \mu_i)$  і  $K_j(u_j, \mu_j)$  може бути подана у вигляді

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j, \mu_i, \mu_j, \tau_{ij}) = \min \{ \Phi^{P_i L}(u_i, \mu_i, \tau_{ij}), \Phi^{P_j L^*}(u_j, \mu_j, \tau_{ij}) \}, \quad (1)$$

де  $\Phi^{PL}(u_i, \mu_i, \tau_{ij}) = \min_{1 \leq k \leq m_i} (\cos \varphi_{ij} \cdot x'_{ik} + \sin \varphi_{ij} \cdot y'_{ik} + \gamma_{ij})$  – нормалізована phi-функція для  $K_i(u_i, \mu_i)$   
 та  $L(\tau_{ij})$ ,  $\Phi^{PL^*}(u_j, \mu_j, \tau_{ij}) = \min_{1 \leq l \leq m_j} (-\cos \varphi_{ij} \cdot x'_{jl} - \sin \varphi_{ij} \cdot y'_{jl} - \gamma_{ij})$  – нормалізована phi-функція для  
 $K_i(u_i, \mu_i)$  та  $L^*(\tau_{ij}) = R^2 \setminus L(\tau_{ij})$ ,

$$x'_{ik} = (\mu_i x_{ik} \cdot \cos \theta_i - (1/\mu_i) \cdot y_{ik} \cdot \sin \theta_i) + x_i,$$

$$y'_{ik} = (\mu_i x_{ik} \cdot \sin \theta_i + (1/\mu_i) \cdot y_{ik} \cdot \cos \theta_i) + y_i.$$

Визначаємо умову неперетину наступним чином: якщо  $\Phi_{ij}(u_i, u_j, \tau_{ij}, \mu_i, \mu_j) \geq 0$  для деяких  $\tau_{ij}$ ,  
 то  $\text{int } K_i(u_i, \mu_i) \cap \text{int } K_j(u_j, \mu_j) = \emptyset$ .

Зазначимо, що  $\max_{\tau_{ij}} \Phi_{ij}(u_i, u_j, \tau_{ij}, \mu_i, \mu_j)$  – phi-функція для м'яких багатокутників  $K_i(u_i, \mu_i)$  і  
 $K_j(u_j, \mu_j)$ .

Умову включення м'якого багатокутника  $K_i(u_i, \mu_i)$  у прямокутну область  $\Omega(h)$ , тобто

$$\text{int } K_i(u_i, \mu_i) \cap \Omega^*(h) = \emptyset, \quad \Omega^*(h) = R^2 \setminus \text{int } \Omega(h),$$

можна описати за допомогою phi-функції об'єктів  $K_i(u_i, \mu_i)$  та  $\Omega^*(h)$ , що може бути визначена так:

$$\Phi_i(u_i, \mu_i, h) = \min_{k=1, \dots, 4} \omega_{ik}(u_i, \mu_i, h), \quad (2)$$

де

$$\omega_{i1}(u_i, \mu_i, h) = (\mu_i x_{ik} \cdot \cos \theta_i - (1/\mu_i)(y_{ik} \cdot \sin \theta_i)) + x_i,$$

$$\omega_{i2}(u_i, \mu_i, h) = -(\mu_i x_{ik} \cdot \cos \theta_i - (1/\mu_i)(y_{ik} \cdot \sin \theta_i)) - x_i + l,$$

$$\omega_{i3}(u_i, \mu_i, h) = (\mu_i x_{ik} \cdot \sin \theta_i + (1/\mu_i)(y_{ik} \cdot \cos \theta_i)) + y_i,$$

$$\omega_{i4}(u_i, \mu_i, h) = -(\mu_i x_{ik} \cdot \sin \theta_i + (1/\mu_i)(y_{ik} \cdot \cos \theta_i)) - y_i + l.$$

Отже, нерівність  $\Phi_i(u_i, \mu_i, h) \geq 0$  забезпечує умову включення  $K_i(u_i, \mu_i) \subset \Omega(h)$ .

Задачу PSP можна сформулювати як модель нелінійного програмування (NLP)

$$\min_{(u, \tau, \mu, h)} h \quad (3)$$

за умов

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j, \mu_i, \mu_j, \tau_{ij}) \geq 0, \quad (i, j) \in \Lambda, \quad (4)$$

$$\Phi_i(u_i, \mu_i, h) \geq 0, \quad i \in I_n, \quad (5)$$

$$\mu = (\mu_i, i \in I_n), \quad 1 \leq \mu_i \leq \mu^+, \quad i \in I_n, \quad (6)$$

$$u = (u_i, i \in I_n), \quad u_i = (x_i, y_i, \theta_i), \quad \tau = (\tau_{ij}, (i, j) \in \Lambda), \quad \tau_{ij} = (\varphi_{ij}, \gamma_{ij}), \quad (7)$$

де функцію  $\Phi_{ij}(u_i, u_j, \mu_i, \mu_j, \tau_{ij})$  визначено в (1), а функцію  $\Phi_i(u_i, \mu_i, h)$  – в (2),

$\Lambda = \{(i, j) : i > j \in I_n\}$ ,  $d = 4n + n(n-1) + 1 = n^2 + 3n + 1$  – число змінних.

### Метод розв'язання задачі PSP

Для розв'язання задачі (3)–(7) запропоновано стратегію, яка складається з таких етапів.

Етап 1. Генерація допустимих стартових точок з використанням гомотетичних перетворень багатокутників  $K_i(u_i, \mu_i)$  для  $\mu_i = 1$ ,  $i \in I_n$  (див. Алгоритм 1).

Етап 2. Пошук локального мінімуму задачі (3)–(7) із застосуванням методу декомпозиції для  $1 \leq \mu_i \leq \mu^+$  (див. Алгоритм 2).

Етап 3. Вибір найкращого варіанту з отриманих на Етапі 2.

Розглянемо алгоритм побудови допустимих стартових розміщень для пошуку локальних мінімумів задачі (3)–(7).

#### Алгоритм 1

Крок 1. Задаємо початкову висоту  $h^0$  контейнера досить великою, так, щоб усі круги  $S_i$  радіуса  $r_i$  з центром  $v_i = (x_i, y_i)$ ,  $i \in I_n$  можна було розмістити всередині контейнера  $\Omega(h^0) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h^0\}$ , наприклад,  $h^0 = 2\mu^+ \max_{i \in I_n} r_i$ .

Крок 2. Генеруємо  $n$  точок  $v_i = (x_i, y_i) \in \Omega(h^0)$ ,  $i \in I_n$  випадковим чином за умови

$$-x_i + l \geq 0, x_i \geq 0, -y_i + h^0 \geq 0, y_i \geq 0 \text{ для } i \in I_n.$$

Крок 3. Розв'язуємо задачу максимізації коефіцієнта гомотетії  $\rho$  кругів  $S_i(v_i, \rho)$ ,  $i \in I_n$ , що не перетинаються та містяться у контейнері  $\Omega(h^0)$ . Ця задача може бути подана у вигляді задачі нелінійного програмування так:

$$\max \beta \text{ s.t. } (v, \rho) \in D,$$

де  $(v, \rho) = (v_1, \dots, v_n, \rho)$  – вектор змінних, а область допустимих розв'язків  $D \subset R^{2n+1}$  описується системою нерівностей

$$\begin{aligned} x_i - \rho r_i &\geq 0, i \in I_n, -x_i + (l - \rho r_i) \geq 0, i \in I_n, \\ y_i - \rho r_i &\geq 0, i \in I_n, -y_i + (h - \rho r_i) \geq 0, i \in I_n, \\ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (\rho r_i + \rho r_j)^2 &\geq 0, (i, j) \in \Lambda, \\ 0 \leq \rho &\leq 1, v_i = (x_i, y_i), i \in I_n, \end{aligned}$$

де  $\Lambda = \{(i, j) : i > j \in I_n\}$ .

Позначимо точку локального максимуму як  $(v^*, \rho^*)$ ,  $v^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ .

Крок 4. Якщо  $\rho^* = 1$ , переходимо до Кроку 5, якщо  $\rho^* < 1$ , вибираємо більше значення параметра  $h^0$  та переходимо до Кроку 2.

Крок 5. Визначаємо стартові значення вектора допоміжних змінних  $\tau_{ij}^0 = (\phi_{ij}^0, \gamma_{ij}^0) \in R^2$ ,  $(i, j) \in \Lambda$ , при фіксованих параметрах  $(v^*, h^0)$ , застосовуючи прості геометричні побудови. Генеруємо випадковим чином  $n$  кутів повороту  $\theta_i^0 \in [0, 2\pi)$  багатокутників  $K_i(u_i, \mu_i)$ , при  $\mu_i = 1$  для  $i \in I_n$ .

Крок 6. Приймаємо вектор  $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0, \tau_{12}^0, \dots, \tau_{n-1,n}^0, h^0)$ ,  $u_i^0 = (v_i^0, \theta_i^0)$  за допустиму стартову точку для пошуку локального мінімуму задачі (3)–(7) за умови  $\mu_i = 1$  для  $i \in I_n$ .

Крок 7. Розв'язуємо задачу пошуку локального мінімуму задачі (3)–(7) за умови  $\mu_i = 1$  для  $i \in I_n$ , за допомогою методу декомпозиції, який подано у роботі [22] для пакування об'єктів, що мають фіксовану просторову форму. Отриману точку локального мінімуму  $(u', \tau', h')$ ,  $\tau' = (\tau'_{ij}, (i, j) \in \Lambda)$  застосовуємо для побудови допустимої стартової точки задачі (3)–(7) за умови  $1 \leq \mu_i \leq \mu^+, i \in I_n$ .

### Алгоритм 2

Для пошуку локальних мінімумів задачі PSP пропонується алгоритм декомпозиції для пакування м'яких багатокутників.

Нехай  $u^{(0)}$  – стартова точка, що отримана за допомогою Алгоритму 1, тобто  $(u^{(0)} = u', \tau^{(0)} = \tau', \mu^{(0)}, h^{(0)} = h')$ ,  $\mu^{(0)} = (\mu'_i = 1, i \in I_n)$ .

Алгоритм декомпозиції для задачі PSP складається з наступних кроків.

Крок 1. Приймаємо  $k = 0$ .

Крок 2. Становимо  $\varepsilon_\mu = \mu^+ \cdot \max_{i \in I_n} r_i$ . Будуємо  $\varepsilon_\mu$ -окіл (рис. 1)

$$\Omega_i^{(k)} = \{(x, y) : x_i^{(k)} - (r_i + \varepsilon_\mu) \leq x \leq x_i^{(k)} + (r_i + \varepsilon_\mu), y_i^{(k)} - (r_i + \varepsilon_\mu) \leq y \leq y_i^{(k)} + (r_i + \varepsilon_\mu)\}.$$

Крок 3. Вводимо обмеження на вектор трансляції  $v_i$  багатокутника  $P_i$ ,  $i \in I_n$

$$f_i^{(k)}(v_i) = \min\{-x_i + x_i^{(k)}, x_i - x_i^{(k)}, -y_i + y_i^{(k)}, y_i - y_i^{(k)}\} + \varepsilon_\mu \geq 0. \quad (8)$$

Крок 4. Формуємо область допустимих розв'язків  $W^{(k+1)}$  для  $(k+1)$  підзадачі у вигляді:

$$W^{(k+1)} = \{(u, \tau, \mu, h) \in R^{d-d^{(k)}} : \Phi(u_i, u_j, \mu_i, \mu_j, \tau_{ij}) \geq 0, (i, j) \in \Lambda^{(k)},$$

$$\Phi^{P_i \Omega_i^*}(u_i, \mu_i, h) \geq 0, i \in I_n, f_i^{(k)}(v_i) \geq 0, i \in I_n\},$$

де  $\Lambda^{(k)} = \{(i, j) \in \Lambda : \|v_i^{(k)} - v_j^{(k)}\| \leq d_{ij}\}$ ,  $d_{ij} = \sqrt{2}(r_i + r_j + 2\varepsilon_\mu)$ ,  $d^{(k)} = m - 2m^{(k)}$ ,  $m = |\Lambda| = n(n-1)/2$

– потужність множини  $\Lambda$ ,  $m^{(k)} = |\Lambda^{(k)}|$  – потужність множини  $\Lambda^{(k)}$ .

Тобто із системи (4) видаляємо нерівності з квазі-phi-функціями для всіх пар багатокутників  $(i, j) \in \Lambda$ , для яких не виконується умова  $\|v_i^{(k)} - v_j^{(k)}\| \leq d_{ij}$  та додаємо до системи (4)–(7) додаткову систему лінійних обмежень  $-x_i + x_i^{(k)} \geq 0$ ,  $x_i - x_i^{(k)} \geq 0$ ,  $-y_i + y_i^{(k)} \geq 0$ ,  $y_i - y_i^{(k)} \geq 0$  (див. (8)) для  $i \in I_n$ . Це дозволяє зменшити кількість змінних на  $d^{(k)}$  та кількість нелінійних обмежень (4) на  $m^{(k)}$ .

Крок 5. Здійснюємо пошук локального мінімуму  $(k+1)$ -ї підзадачі нелінійного програмування

$$\min_{(u, \tau^{(k)}, \mu, h)} h \quad (9)$$

за умови

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j, \mu_i, \mu_j, \tau_{ij}) \geq 0, (i, j) \in \Lambda^{(k)}, \quad (10)$$

$$\Phi_i(u_i, \mu_i, h) \geq 0, i \in I_n, \quad (11)$$

$$f_i^{(k)}(v_i) \geq 0, i \in I_n, \quad (12)$$

$$h \leq h^{(k)}, \quad (13)$$

$$u = (u_i, i \in I_n), u_i = (x_i, y_i, \theta_i), \tau^{(k)} = (\tau_{ij}, (i, j) \in \Lambda^{(k)}), \tau_{ij} = (\phi_{ij}, \gamma_{ij}). \quad (14)$$

Позначимо точку локального мінімуму задачі (9)–(14) як  $(u^{*(k+1)}, \mu^{*(k+1)}, h^{*(k+1)})$ .

Крок 6. Якщо  $|h^{*(k+1)} - h^{*(k)}| \geq \delta$ , то переходимо до Кроку 7, інакше зупиняємо алгоритм.

Крок 7. Становимо  $k = k + 1$  та переходимо до Кроку 2.

На рис. 1 показано приклад роботи Алгоритму 2. Розміщення  $n = 4$  багатокутників, що відповідає допустимій стартовій точці задачі (3)–(7), показано на рис. 1,а, водночас чотири ітерації роботи Алгоритму 2, що відповідають розв’язанню послідовності задач (9)–(14) для  $k = 1, 2, 3, 4$ , показано на рис. 1,б–г.

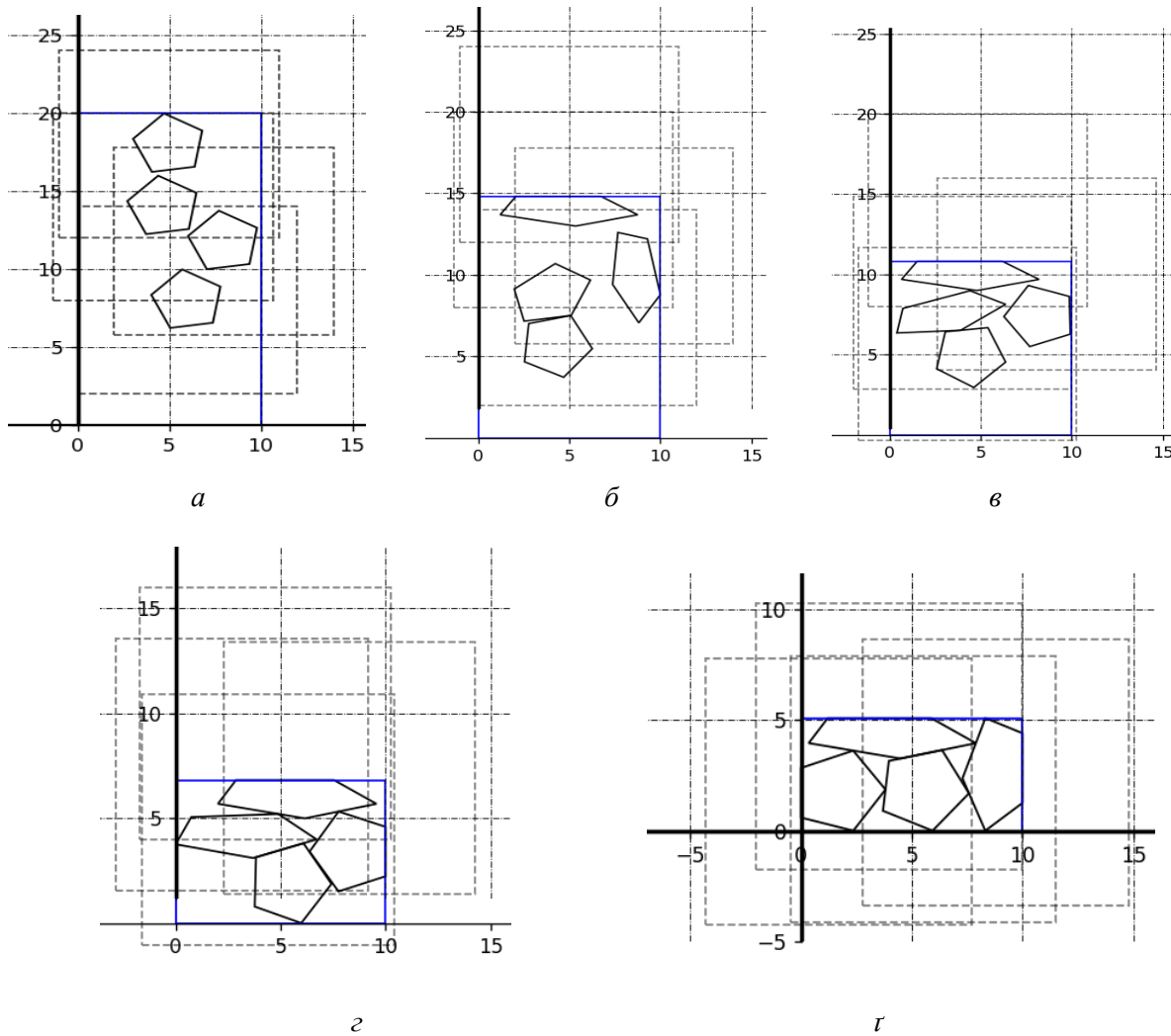


РИС. 1. Ілюстрація до Алгоритму 2: а –  $k = 0$ , б –  $k = 1$ , в –  $k = 2$ , г –  $k = 3$ , д –  $k = 4$

Зазначимо, що локальний мінімум задачі (9)–(14) для  $k = 4$  (рис. 1,д) – локальний мінімум задачі (3)–(7) для розміщення  $n = 4$  м’яких багатокутників.

### Числові приклади

Приклад 1. Пакування  $n = 27$  м'яких багатокутників у прямокутнику мінімальної висоти для  $l = 20$ ,  $\mu^+ = 2$ . Стартові розміри багатокутників: правильні п'ятикутники з радіусом описаного кола –  $r_i = 2$  для  $i = 1, \dots, 4$ ,  $r_i = 1.7$  для  $i = 5, \dots, 9$ ; правильні шестикутники з радіусом описаного кола –  $r_i = 2$  для  $i = 10, \dots, 13$ ,  $r_i = 1.7$  для  $i = 14, \dots, 18$ ; правильні семикутники з радіусом описаного кола –  $r_i = 2$  для  $i = 19, \dots, 22$ ,  $r_i = 1.7$  для  $i = 23, \dots, 27$ .

Допустима стартова точка задачі (3)–(7), що отримана із застосуванням Алгоритму 1, відповідає локально-оптимальному значенню цільової функції задачі пакування правильних багатокутників та становить  $h' = 15.715$ .

Локально-оптимальне розміщення м'яких багатокутників, що отримано із застосуванням Алгоритму 2, становить  $h^* = 14.276$ .

Вектори параметрів розміщення  $(x_i^*, y_i^*, \theta_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, 27$ , та коефіцієнти розтягування  $\mu_i^*$ ,  $i = 1, \dots, 27$ , м'яких багатокутників, що відповідають локальному мінімуму цільової функції  $h^*$ , наведені у табл. 1.

Загальна площа  $n = 27$  багатокутників становить 234.831. Коефіцієнт заповнення контейнера для правильних багатокутників становить 74.716 %, для м'яких – 82.247 %.

ТАБЛИЦЯ 1. Вихідні дані: параметри розміщення та значення коефіцієнта розтягування багатокутників  $P_i(u_i^*, \mu_i^*), i = 1, \dots, 27$

| $i$ | $(x_i^*, y_i^*, \theta_i^*)$ | $\mu_i^*$ | $i$ | $(x_i^*, y_i^*, \theta_i^*)$ | $\mu_i^*$ |
|-----|------------------------------|-----------|-----|------------------------------|-----------|
| 1   | (12.164, 1.52, 2.65)         | 1.287     | 15  | (11.053, 10.173, 2.87)       | 1.0       |
| 2   | (17.764, 4.701, 3.665)       | 1.227     | 16  | (15.462, 1.678, 2.942)       | 1.0       |
| 3   | (18.385, 12.41, 3.979)       | 1.036     | 17  | (6.836, 5.29, 2.526)         | 1.12      |
| 4   | (9.21, 12.657, 4.272)        | 1.0       | 18  | (18.528, 1.705, 5.920)       | 1.0       |
| 5   | (16.725, 9.518, 4.233)       | 1.0       | 19  | (12.886, 7.792, 0.663)       | 1.182     |
| 6   | (19.01, 8.606, 4.636)        | 1.406     | 20  | (1.902, 12.395, 1.75)        | 1.0       |
| 7   | (7.298, 10.94, 5.598)        | 1.56      | 21  | (9.716, 3.838, 0.858)        | 1.5       |
| 8   | (16.014, 6.774, 4.848)       | 1.0       | 22  | (13.613, 4.403, 2.094)       | 1.0       |
| 9   | (14.738, 10.954, 3.701)      | 1.454     | 23  | (2.335, 1.048, 6.20)         | 1.491     |
| 10  | (5.826, 8.44, 1.081)         | 1.025     | 24  | (2.555, 6.209, 0.06)         | 1.655     |
| 11  | (9.165, 7.3, 2.236)          | 1.0       | 25  | (1.402, 8.803, 1.777)        | 1.101     |
| 12  | (4.957, 3.487, 5.468)        | 1.372     | 26  | (7.861, 0.804, 6.24)         | 1.95      |
| 13  | (14.26, 12.928, 3.418)       | 1.755     | 27  | (1.535, 3.698, 0.007)        | 1.0       |
| 14  | (4.06, 10.831, 1.285)        | 2.0       |     |                              |           |

На рис. 2 показано допустиме стартове (рис. 2,а) та відповідне локально-оптимальне розміщення м'яких багатокутників (рис. 2,б).

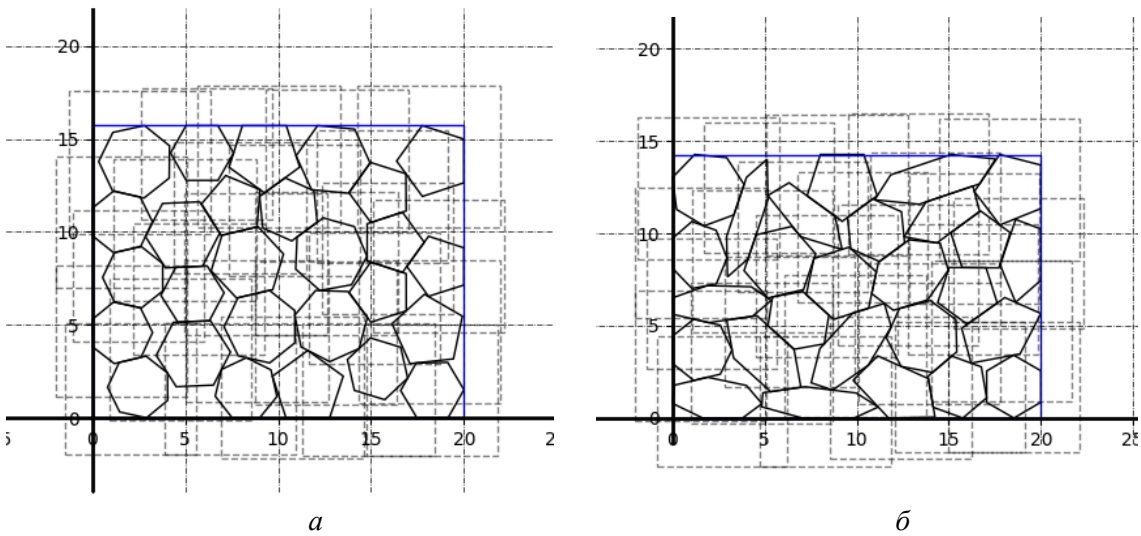


РИС. 2. Розміщення м'яких багатокутників для прикладу 1: *a* – стартове; *б* – локально-оптимальне

*Приклад 2.* Пакування  $n = 14$  м'яких орієнтованих прямокутників у прямокутній області мінімальної висоти для  $l = 10$ ,  $\mu^+ = 2$ . Стартові розміри прямокутників:  $a_i = 2\sqrt{2}$  – довжина,  $b_i = 2\sqrt{2}$  – ширина,  $i = 1, \dots, 14$ .

Розглянемо локально-оптимальні розв'язки задачі (3)–(7) для двох допустимих стартових точок.

*Випадок 1.* Перша допустима стартова точка задачі (3)–(7), що отримана із застосуванням Алгоритму 1, відповідає локально-оптимальному значенню цільової функції задачі пакування орієнтованих прямокутників та становить  $h' = 14.1$ .

Локально-оптимальне значення задачі (3)–(7) пакування м'яких орієнтованих прямокутників, що отримано із застосуванням Алгоритму 2, становить  $h^* = 11.23$ .

Вектори параметрів розміщення  $(x_i^*, y_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, 14$ , та коефіцієнти розтягування  $\mu_i^*$ ,  $i = 1, \dots, 14$ , м'яких орієнтованих прямокутників, що відповідають локальному мінімуму цільової функції  $h^*$ , наведені у табл. 2.

Загальна площа  $n = 14$  прямокутників становить 112. Коефіцієнт заповнення контейнера для допустимого стартового розміщення становить 79.4%, для м'яких прямокутників – 99.7%.

ТАБЛИЦЯ 2. Вихідні дані: параметри розміщення та значення коефіцієнта розтягування орієнтованих прямокутників  $P_i(v_i^*, \mu_i^*), i = 1, \dots, 14$

| $i$ | $(x_i^*, y_i^*)$ | $\mu_i^*$ | $i$ | $(x_i^*, y_i^*)$ | $\mu_i^*$ |
|-----|------------------|-----------|-----|------------------|-----------|
| 1   | (8.338, 10.033)  | 1.179     | 8   | (5.014, 10.033)  | 1.179     |
| 2   | (8.149, 1.074)   | 1.313     | 9   | (4.954, 7.683)   | 1.221     |
| 3   | (8.149, 5.371)   | 1.313     | 10  | (1.616, 5.166)   | 1.146     |
| 4   | (8.149, 3.223)   | 1.313     | 11  | (4.765, 5.232)   | 1.087     |
| 5   | (8.338, 7.641)   | 1.179     | 12  | (1.616, 7.626)   | 1.146     |
| 6   | (1.676, 10.043)  | 1.188     | 13  | (4.724, 1.263)   | 1.117     |
| 7   | (2.925, 3.23)    | 2.0       | 14  | (1.575, 1.263)   | 1.117     |



На рис. 3 показано стартове розміщення орієнтованих прямокутників (рис. 3,а) та відповідне локально-оптимальне розміщення м'яких орієнтованих прямокутників (рис. 3,б).

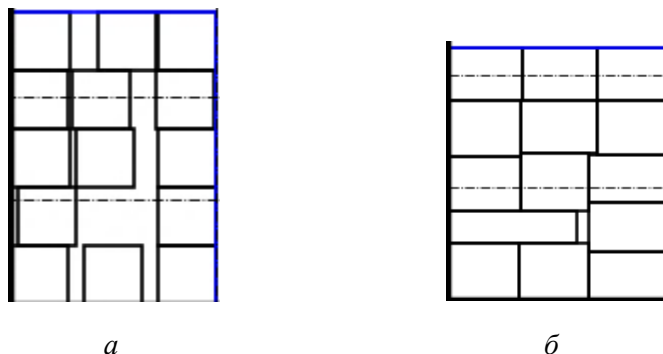


РИС. 3. Розміщення орієнтованих м'яких прямокутників для прикладу 2 (випадок 1): а – допустиме стартове; б – локально-оптимальне

*Випадок 2.* Друга допустима стартова точка задачі (3)–(7), що отримана із застосуванням Алгоритму 1, відповідає локально-оптимальному значенню цільової функції задачі пакування орієнтованих прямокутників та становить  $h' = 16.92$ .

Локально-оптимальне значення задачі (3)–(7) пакування м'яких орієнтованих прямокутників становить  $h^* = 11.29$ , що отримано із застосуванням Алгоритму 2.

Вектори параметрів розміщення  $(x_i^*, y_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, 14$ , та коефіцієнти розтягування  $\mu_i^*$ ,  $i = 1, \dots, 14$ , м'яких орієнтованих прямокутників, що відповідають локальному мінімуму цільової функції  $h^*$ , наведені у табл. 3.

Загальна площа 14 прямокутників становить 112. Коефіцієнт заповнення контейнера для допустимого стартового розміщення становить 66.2 %, для м'яких прямокутників – 99.2 %.

ТАБЛИЦЯ 3. Вихідні дані: параметри розміщення та значення коефіцієнта розтягування

| $i$ | $(x_i^*, y_i^*)$ | $\mu_i^*$ | $i$ | $(x_i^*, y_i^*)$ | $\mu_i^*$ |
|-----|------------------|-----------|-----|------------------|-----------|
| 1   | (7.82, 4.146)    | 1.546     | 8   | (2.18, 0.912)    | 1.546     |
| 2   | (7.82, 2.322)    | 1.546     | 9   | (7.5, 7.677)     | 1.773     |
| 3   | (7.82, 5.97)     | 1.546     | 10  | (5.77, 9.882)    | 1.0       |
| 4   | (8.59, 9.882)    | 1.0       | 11  | (2.18, 10.38)    | 1.546     |
| 5   | (4.23, 4.644)    | 1.0       | 12  | (2.5, 6.849)     | 1.773     |
| 6   | (7.18, 0.705)    | 2.0       | 13  | (2.82, 2.529)    | 2.0       |
| 7   | (1.41, 4.644)    | 1.0       | 14  | (2.18, 8.556)    | 1.546     |

На рис. 4 показано стартове розміщення орієнтованих прямокутників (рис. 4,а) та відповідне розміщення м'яких орієнтованих прямокутників (рис. 4,б) для прикладу 2.2.

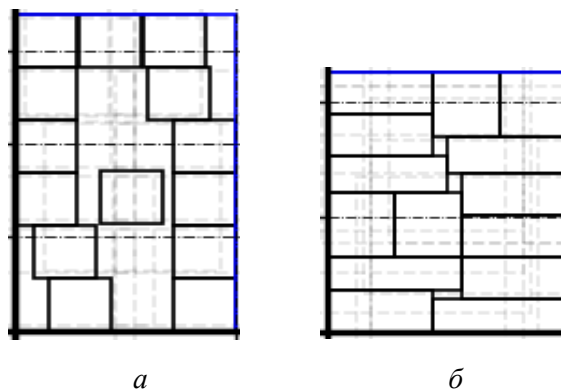


РИС. 4. Розміщення орієнтованих м'яких прямокутників для прикладу 2 (випадок 2): *a* – допустиме стартове; *б* – локально-оптимальне

Для обчислювальних експериментів застосовано комп'ютер DESKTOP-Q9PIRON, процесор 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-12500 3.00 GHz. Оперативна пам'ять 32.0 ГБ. Мова програмування Python 3.11.

### Висновки

Досліджено задачу пакування м'яких багатокутників у прямокутній області мінімальної висоти. Кожен багатокутник має змінний параметр розтягування та змінні параметри розміщення. Використовуються квазі- $\phi$ -функції та  $\phi$ -функції для аналітичного опису умов розміщення м'яких багатокутників (неперетину багатокутників та їх включення в контейнер). Математична модель сформульована як задача нелінійного програмування. Для пошуку локальних розв'язків задачі оптимізації пакування м'яких багатокутників запропоновано підхід, що базується на побудові допустимих розміщень (з використанням гомотетичних перетворень геометричних об'єктів) та декомпозиції задачі великої розмірності до послідовності задач нелінійного програмування меншої розмірності.

Пакування м'яких багатокутників мотивоване моделюванням пористих середовищ під тиском. У цій роботі розглядалися тільки полігональні двовимірні об'єкти. Однак в практичних застосуваннях часто виникають задачі пакування об'єктів, що мають форму багатогранників або еліпсоїдів. Геометричні засоби моделювання та оптимізаційні алгоритми, що наведені у статтях [23–26] можуть бути використані для розробки методів пакування м'яких тривимірних об'єктів. Деякі результати в цьому напрямку вже отримані.

**Авторські внески.** Романова Т., Панкратов О. – концептуалізація; Романова Т., Мелашенко О., Панкратов О., Шеховцов С. – дослідження, методологія, формальний аналіз; Мелашенко О., Шеховцов С. – узагальнення, написання (підготовка оригіналу); Мелашенко О., Мартінес-Гомес К. Г. – алгоритмічне та програмне забезпечення, чисельні експерименти, візуалізація.

### Список літератури

1. Yagiura M., Umetani S., Imahori S., Hu Y. Cutting and Packing Problems. From the Perspective of Combinatorial Optimization. Tokyo: Springer, 2024. ISBN 978-4-431-55290-1
2. Fischer A., Scheithauer G. Cutting and packing problems with placement constraints. *Optimized Packings with Applications*. Springer Optimization and Applications. 2015. **105**. P. 119–156. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-18899-7\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-18899-7_6)
3. Kallrath J. Cutting & Packing beyond and within Mathematical Programming. *Business Optimisation Using Mathematical Programming*. 2021. P. 495–526. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-73237-0\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-73237-0_15)
4. Jiang J., Garikipati K., Rudraraju S. A Diffuse Interface Framework for Modeling the Evolution of Multicell Aggregates as a Soft Packing Problem Driven by the Growth and Division of Cells. *Bulletin of Mathematical Biology*. 2019. **81**. P. 3282–3300. <https://doi.org/10.1007/s11538-019-00577-1>

5. Yuan Q., Li Z., Gao Y., Wang Y.H., Li X. Local responses in 2D assemblies of elliptical rods when subjected to biaxial shearing. *Acta Geotechnica*. 2019. **14**. P. 1685–1697. <https://doi.org/10.1007/s11440-019-00844-4>
6. Chen Y., Yuan M., Wang Z., Zhao Y., Li J., Hu B., Xia C. Structural characterization and statistical properties of jammed soft ellipsoid packing. *Soft Matter*. 2021. **17**. P. 2963. <https://doi.org/10.1039/D0SM01699C>
7. Bui, Q.T., Vidal, T. & Hà, M.H. On three soft rectangle packing problems with guillotine constraints. *J Glob Optim*. 2019. **74**. P. 45–62. <https://doi.org/10.1007/s10898-019-00741-w>
8. Zuo Q. The Three-dimensional Bin Packing Problem for Deformable Items. *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*. Kuala Lumpur, Malaysia. 2022. P. 0911-0918. <https://doi.org/10.1109/IEEM55944.2022.9989600>
9. Blunt M.J. *Multiphase Flow in Permeable Media: A Pore-Scale Perspective*. Cambridge: Cambridge University Press. 2017. <https://doi.org/10.1017/9781316145098>
10. Eichheimer P., Thielmann M., Popov A., Golabek G.J., Fujita W., Kottwitz M.O., Kaus B.J.P. (2019). Pore-scale permeability prediction for Newtonian and non-Newtonian fluids. *Solid Earth*. 2019. **10** (5). 1717–31. <https://doi.org/10.5194/se-10-1717-2019>
11. Dong X., Liu H., Hou J., Zhang Z., Chen Z. Multi-thermal fluid assisted gravity drainage process: a new improved-oil-recovery technique for thick heavy oil reservoir. *J. Petrol. Sci. Eng*. 2015. **133**. P. 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2015.05.001>
12. Al-Nakhli A., Tariq Z., Mahmoud M., Abdulraheem A., Al Shehri D. A novel thermochemical fracturing approach to reduce fracturing pressure of high strength rocks. Abu Dhabi Int. Petroleum Exhibition & Conf., SPE-197593-MS. 2019. <https://doi.org/10.2118/197593-MS>
13. Romanova T., Stoyan Yu., Pankratov A., Litvinchev I., Kravchenko O., Duryagina Z., Melashenko O., Chugai A. Optimized packing soft ellipses. Chapter in book *Human-Assisted Intelligent Computing*. 2023. P. 9.1–9.16. <https://doi.org/10.1088/978-0-7503-4801-0ch9>
14. Torres J., Hitschfeld N., Ruiz R.O., Ortiz-Bernardin A. Convex Polygon Packing Based Meshing Algorithm for Modeling of Rock and Porous Media. *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Cham. 2020. **12141**. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-50426-7\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-030-50426-7_20)
15. Burke E., Kendall G. A New Approach to Packing Non-Convex Polygons Using the No Fit Polygon and Meta-Heuristic and Evolutionary Algorithms. *Adaptive Computing in Design and Manufacture V*. Springer, London. 2002. [https://doi.org/10.1007/978-0-85729-345-9\\_17](https://doi.org/10.1007/978-0-85729-345-9_17)
16. Pankratov A., Romanova T., Shekhovtsov S., Grebennik I., Pankratova J. Packing Irregular Polygons using Quasi Phi-functions. *2020 10th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)*. Deggendorf, Germany, 2020. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/ACIT49673.2020.9208979>
17. Peralta J., Andretta M., Oliveira J.F. Solving irregular strip packing problems with free rotations using separation lines. 2017. <https://doi.org/10.5220/0006602700710077>
18. Peralta J., Andretta M., Oliveira J. Packing Circles and Irregular Polygons using Separation Lines. *In Proceedings of the 7th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems (ICORES 2018)*. 2018. P. 71–77. <https://doi.org/10.5220/0006602700710077>
19. Kallrath J., Romanova T., Pankratov A., Litvinchev I., Infante L. Packing convex polygons into minimum perimeter convex hulls. *Journal of Global Optimization*. 2023. **85** (1). P. 39–59. <https://doi.org/10.1007/s10898-022-01194-4>
20. Litvinchev I., Infante L., Romanova T., Martinez-Noa A., Gutierrez L. Optimized packing soft convex polygons. *Computer Science and Engineering in Health Services. COMPSE 2022. EAI/Springer Innovations in Communication and Computing*. Springer, Cham. 2024. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-34750-4\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-031-34750-4_7)
21. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. 2016. **65** (2). P. 283–307. <https://doi.org/10.1007/s10898-015-0331-2>
22. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., Litvinchev I., Marmolejo J.A. Decomposition algorithm for irregular placement problems. *In Intelligent Computing and Optimization, AISC*. 2019. **1072**. P. 214–221. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-33585-4\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-030-33585-4_21)
23. Li J., An X., Wang J., Zhao H., Zou R., Dong K., Gou D. Experimental study on 3D vibrated packing densification of mono-sized dodecahedral particles. *Powder Technology*. 2020. **367**. P. 703–712. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2020.04.020>
24. Romanova T., Bennell J., Stoyan Y., Pankratov A. Packing of concave polyhedra with continuous rotations using non-linear optimization. *European Journal of Operational Research*. 2018. **268** (1). P. 37–53. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.01.025>
25. Romanova T., Litvinchev I., Pankratov A. Packing ellipsoids in an optimized cylinder. *European Journal of Operational Research*. 2020. **285** (2). P. 429–443. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.01.051>

26. Leao A.S., Toledo F.M.B., Oliveira J.F., Carravilla M.A., Alvarez-Valdés R. Irregular packing problems: a review of mathematical models. *European Journal of Operational Research*. 2020. **282**. P. 803–822. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.04.045>

Одержано 12.12.2023

**Мелашенко Оксана Петрівна,**

аспірантка Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,  
<https://orcid.org/0000-0002-4550-6879>  
[o.p.melashenko@gmail.com](mailto:o.p.melashenko@gmail.com)

**Романова Тетяна Євгенівна,**

доктор технічних наук, професор,  
запрошений професор Університету Лідса, Великобританія,  
<https://orcid.org/0000-0002-8618-4917>  
[t.romanova@leeds.ac.uk](mailto:t.romanova@leeds.ac.uk)

**Панкратов Олександр Вікторович,**

доктор технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник  
Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків,  
<https://orcid.org/0000-0002-2958-8923>  
[pankratov2001@yahoo.com](mailto:pankratov2001@yahoo.com)

**Шеховцов Сергій Борисович,**

кандидат технічних наук, доцент,  
доцент Харківського національного університету радіоелектроніки,  
<https://orcid.org/0000-0003-2381-7999>  
[serhii.shekhovtsov@nure.ua](mailto:serhii.shekhovtsov@nure.ua)

**Мартінес-Гомес Карлос Густаво,**

аспірант Університету штату Нуево-Леон (UANL), Мексика.  
[gustavo.martinezgmx@uanl.edu.mx](mailto:gustavo.martinezgmx@uanl.edu.mx)

УДК 519.85

О.П. Мелашенко<sup>1</sup>, Т.Є. Романова<sup>2\*</sup>, О.В. Панкратов<sup>1</sup>, С.Б. Шеховцов<sup>3</sup>, К. Г. Мартінес-Гомес<sup>4</sup>

## Пакування м'яких багатокутників у прямокутній області мінімальної висоти

<sup>1</sup> Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків

<sup>2</sup> Університет Лідса, Велика Британія

<sup>3</sup> Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

<sup>4</sup> Університету штату Нуево-Леон (UANL), Мексика

\* Листування: [t.romanova@leeds.ac.uk](mailto:t.romanova@leeds.ac.uk)

У роботі досліджено задачу пакування опуклих багатокутників, що мають змінну просторову форму відповідно до коефіцієнту розтягування (м'які багатокутники), в прямокутній області мінімальної висоти. Розміщення об'єктів, що мають змінну просторову форму, використовується, наприклад, у біології, матеріалознавстві, механіці, землевідведенні та логістиці. Інтерес до цих проблем також обумовлений моделюванням структур пористих середовищ під тиском, наприклад, для створення тестових моделей штучних цифрових ядер. Елементи пористих середовищ можуть деформуватися під дією зовнішньої сили, однак маса кожної частинки залишається незмінною. Це відповідає збереженню площі для двовимірного випадку. Багатокутні об'єкти мають бути повністю розміщені у контейнері (обмеження включення) та не перетинатися (обмеження неперетину) за умови їх вільних трансляцій, неперервних обертань, перетворення розтягування та збереження їх площі. Для аналітичного опису обмежень розміщення багатокутників змінної форми застосовано метод  $\rho$ -функцій. Визначено квазі- $\rho$ -функції для опису умов неперетину та  $\rho$ -функції для опису умов включення. Задачу пакування сформульовано у вигляді моделі нелінійного програмування. Запропоновано стратегію, яка складається з наступних етапів: гене-

рація допустимих стартових точок; пошук локальних мінімумів задачі для кожної стартової точки із застосуванням методу декомпозиції; вибір найкращого варіанту. Для пошуку розумних допустимих розміщень застосовано алгоритм оптимізації пакування оригінальних багатокутників з використанням їх гомотетичних перетворень. Основою методу декомпозиції оптимізаційної задачі пакування м'яких багатокутників є ітераційна процедура, яка дозволяє звести задачу великої розмірності до послідовності задач нелінійного програмування значно меншої розмірності (лінійної по відношенню до числа об'єктів). Надано числові приклади для м'яких орієнтованих прямокутників та м'яких неорієнтованих правильних багатокутників.

**Ключові слова:** пакування, багатокутники, перетворення розтягування, прямокутний контейнер, квазі- $\phi$ -функції, оптимізація, алгоритм декомпозиції.

MSC 90B85

Oksana Melashenko<sup>1</sup>, Tetyana Romanova<sup>2\*</sup>, Oleksandr Pankratov<sup>1</sup>, Sergiy Shekhovtsov<sup>3</sup>, Carlos Gustavo Martinez-Gomez<sup>4</sup>

### Packing Soft Polygons in a Minimum Height Rectangular Target Domain

<sup>1</sup> *Anatolii Pidhornyi Institute of Mechanical Engineering Problems of the NAS of Ukraine, Kharkiv*

<sup>2</sup> *University of Leeds, UK*

<sup>3</sup> *Kharkiv National University of Radioelectronics, Ukraine*

<sup>4</sup> *Nuevo Leon State University (UANL), Mexico*

\* *Correspondence: [t.romanova@leeds.ac.uk](mailto:t.romanova@leeds.ac.uk)*

The paper studies packing polygons of variable shapes, regarding the stretching coefficient, in a rectangular target domain of minimum height. Packing objects of a variable shape have a wide spectrum of applications, e.g. in biology, materials science, mechanics, land allocation, and logistics. Interest in these problems is also due to the modeling of the structures of porous media under pressure, e.g., for creating test models of artificial digital cores. Elements of porous media can be deformed under the influence of an external force, but the mass of each particle remains unchanged. This corresponds to conservation of area for the two-dimensional case. Polygonal objects must be completely contained within the target domain (containment constraint) and do not overlap (non-overlapping constraint), provided they have free translations, continuous rotations, stretch transformations, and conserve their area. The  $\phi$ -function technique is used for an analytical description of the placement constraints for variable shape polygons. Quasi- $\phi$ -functions for describing non-overlapping constraints and  $\phi$ -functions for describing containment constraints are defined. The packing problem is presented in the form of a nonlinear programming model. A solution strategy is proposed, which consists of the following stages: generation of feasible starting points; search for local minima of the problem of packing soft polygons for each starting point using the decomposition algorithm; choosing the best local minimum found at the previous stage. To search for smart starting arrangements, an optimization algorithm for packing original polygons using their homothetic transformations is applied. Decomposition of the problem of packing polygons of variable shapes is based on an iterative procedure that allows reducing a large-scale problem to a sequence of smaller nonlinear programming problems (linear to the number of objects). Numerical examples are provided for oriented rectangles and non-oriented regular polygons.

**Keywords:** packing, polygons, stretch transformation, rectangular container, quasi- $\phi$ -functions, optimization, decomposition algorithm.