КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.64; 519.65 DOI:10.34229/2707-451X.24.1.5

О.М. КОЛОМИС

ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ТОЧНІСТЮ ВІДНОВЛЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ РЯДІВ ФУР'Є

Розглядаються задачі апроксимації функції, яка задана своїми значеннями в N точках тригонометричним рядом Фур'є із заданою точністю і при заданому обмеженні на час її вирішення на комп'ютері. Основну увагу приділено отриманню оцінок обчислювальної складності (часу T) та вирішенню задачі апроксимації функції рядом Фур'є із заданою або максимально можливою точністю з використанням ефективних алгоритмів розв'язання оптимізаційних завдань

Ключові слова: *апроксимація функцій, ряди Фур'є, коефіцієнти ряду Фур'є, похибка апроксимації, обчислювальна складність.*

Вступ. Завдання апроксимації (наближення або відновлення) функції $f(x)$ для багатьох задач прикладної математики – досить важлива, особливо у випадках, коли, наприклад, функція $f(x)$ має складну аналітичну будову або задана своїми значеннями як результат вимірювання. У такій ситуації природно замість функції $f(x)$ використовувати деяку іншу функцію $S(x,f)$, яка досить "близька" до $f(x)$, але має більш простий аналітичний вигляд (наприклад, сплайн, поліном Лагранжа, Ерміта, ряд Фур'є і т. д.).

Один із найпоширеніших способів розв'язання цієї задачі – це апроксимація функцій рядами Фур'є з використанням різних систем базисних функцій. Особливо активно застосовується апроксимація функцій рядами Фур'є, наприклад, у задачах цифрової обробки сигналів [1, 2].

Апроксимант як правило, будується у вигляді

$$S(x,f)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k v_k(x), \tag{1}$$

$$a_k=\int_a^b f(x)v_k(x)dx,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

де $\{v_k(x)\}$ – фіксована лінійно незалежна та ортонормована система функцій.

Ряд (1) з коефіцієнтами, обчисленими за формулою (2) називається узагальненим рядом Фур'є даної функції, а самі коефіцієнти – її (узагальненими) коефіцієнтами Фур'є. Якщо, $v_k(x)=\{\cos kx,\sin kx\}$ тобто $v_k(x)$ – тригонометричний поліном, то (1), (2) – тригонометричний ряд Фур'є [3].

1. Постановка задачі. Наведемо загальну постановку розв'язання задачі апроксимації функції відповідно до технології розв'язання задач обчислювальної та прикладної математики із заданими значеннями характеристик якості [4].

Нехай K – клас задач апроксимації функцій, $A(X)$ – клас о. а., призначених для побудови розв'язку задач k із класу K ($k \in K$) з використанням вхідної інформації $I = I(I_0, I_N(k))$, де I_0 – інформація про властивості задач k із класу K, $I_N = I_N(k) = (i_1(k), ..., i_N(k))^T$ – інформація про задачу $k \in K$ у вигляді N функціоналів, обчислених на елементах задачі k.

Нехай $c(Y)$ – модель комп'ютера, яка включає певні архітектурні властивості комп'ютера і належить деякому класу моделей $C(Y)$: $c(Y) \in C(Y)$.

Ставиться задача: обчислити розв'язок (у загальному випадку наближений) задачі $k \in K$ за умов:

$$\rho(E(I, X, Y)) \le \varepsilon, \tag{3}$$

$$T(\varepsilon, I, X, Y) \le T_0(\varepsilon), \tag{4}$$

$$M(\varepsilon, I, X, Y) \le M_0, \tag{5}$$

де $\rho(\cdot)$ – деяка міра похибки наближеного розв'язку задачі $k \in K$; I – вхідні дані задачі, $E(I, X, Y)$ – повна похибка наближеного розв'язку, яка є сумою трьох складових: $E_H(\cdot)$ – неусувної похибки за рахунок неточності вхідних даних, $E_\mu(\cdot)$ – похибки методу (алгоритму), $E_\tau(\cdot)$ – похибки заокруглень [2, 3, 5]; X, Y – вектори параметрів, що характеризують відповідно алгоритми та комп'ютери з класів A і C; $T(I, X, Y)$, $M(I, X, Y)$ – відповідно процесорний час і пам'ять комп'ютера, необхідні для обчислення наближеного розв'язку; ε, $T_0(\varepsilon)$, $M_0(\varepsilon)$ – обмеження, задані на основі вимог до якості розв'язку задачі і властивостей вхідної інформації I (обсягу, точності, структури, способу отримання).

Наближений розв'язок, для якого виконується умова (3), називається ε-розв'язком, $A(\varepsilon, X, Y)$ – множина о. а. побудови ε-розв'язку. Обчислювальний алгоритм, який задовольняє умовам (3), (4), називається T-ефективним, $A(\varepsilon, T_0, X, Y)$ – множина T-ефективних о. а.

Окрім задачі (3)–(5) доцільно розглянути також задачу

$$\varepsilon_{\min} = \min_{\substack{I, X, Y \\ T(I, X, Y) \le T_0}} E(I, X, Y) = \varepsilon^0. \tag{6}$$

Як клас задач K розглянемо задачі ε-відновлення (або ε-наближення) на комп'ютері $c(Y)$ функції $f(x) \in F$ з деякого класу функцій F, заданих своїми значеннями в N точках відрізка $[-l, l]$.

Нехай необхідно вибрати функцію $S(x, f)$ і запропонувати алгоритм $a(X) \in A(\varepsilon, I, X, Y)$ побудови такої функції $S(x, f)$, яка відхиляється від $f(x) \in F$ на $[-l, l]$ не більше, ніж на задану величину ε $(\varepsilon > 0)$, тобто похибка апроксимації E задовольняє умову (3), а саме:

$$\rho(E(I, X, Y)) = \| f(x) - S(x, f) \|_1 = \max_{\substack{f(x) \in F \\ x \in [-l,\, l]}} | f(x) - S(x, f) | \le \varepsilon,$$

і ця побудова здійснюється на обраній моделі комп'ютера $c(Y)$ з параметрами Y за час $T = T(\varepsilon, I, X, Y)$, що не перевищує заданого T_0, тобто, задовольняє умову (4).

Нехай функція $f(x)\in F$ на відрізку $[-l,l]$ задана N своїми значеннями $\{f_i\}_0^{N-1}$ в деякому наборі вузлових точок $\{x_i\}_0^{N-1}$ з її області визначення. У цьому випадку компонентами вектора I є $I_0=F$, $I_N=I_N(k)=(f_0,...,f_{N-1})^T$, де $\{f_i\}_0^{N-1}=f(x_i)$, $\quad i=\overline{0,N-1}$ – значення функції $f(x)$ в N точках $\{x_i\}_0^{N-1}$ відрізка $[-l,l]$, компонентами вектора $Y=(\tau,\{t_i\}_1^p)$ є: τ – довжина розрядної сітки комп'ютера $c(Y)$, $\{t_i\}_1^p$ – час виконання елементарних операцій з деякого набору p операцій на $c(Y)$.

Розглянемо апроксимацію функцій рядами Фур'є [3, 6, 7] вигляду

$$f(x)\approx S(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{7}$$

де a_k, b_k – коефіцієнти ряду Фур'є, які визначаються співвідношеннями:

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ k=0,1,2,3,\ldots\ ,\ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad k=1,2,3,\ldots. \tag{8}$$

Функцію $f(x)$ будемо апроксимувати скінченними частинними сумами Фур'є вигляду

$$S_n(x,f)=\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\tilde{b}_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{9}$$

де $\tilde{a}_0,\tilde{a}_k,\tilde{b}_k$, $k=\overline{1,n}$, – наближені значення коефіцієнтів ряду Фур'є, які обчислюються відповідними алгоритмами чисельного інтегрування.

Як алгоритми $a(X)$ розв'язку задачі $k\in K$ розглянемо алгоритми апроксимації функцій $f(x)\in F$ частинними сумами Фур'є вигляду (9) з використанням для обчислення коефіцієнтів Фур'є оптимальних за точністю і близьких до них на класах F квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій [1, 2]. Очевидно, що параметрами алгоритму $a(X)$, від яких залежить оцінка E, будуть: F – клас функцій, n – кількість використаних членів ряду Фур'є, N – обсяг вхідної інформації, необхідний для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є $\tilde{a}_0,\tilde{a}_k,\tilde{b}_k,k=\overline{1,n}$.

В роботах [1, 2] наведені оцінки повних похибок обчислення $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ за допомогою квадратурних формул, які позначимо як V_{a_k} і V_{b_k}. Тоді оцінку E можна представити у вигляді

$$E=E(F,N,n)=\left\|f(x)-S_n(x,f)\right\|_1=\max_{\substack{f(x)\in F\\ x\in[-l,\,l]}}\left|f(x)-S_n(x,f)\right|=$$

$$=\max_{\substack{f(x)\in F\\ x\in[-l,\,l]}}\left\|\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right]-\left[\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\tilde{b}_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right]\right\|\le$$

$$\le\left|R_n(F)\right|+\frac{V_{a_0}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(V_{a_k}+V_{b_k}\right), \tag{10}$$

де $V_{a_k} = V_{a_k}\left(F,\, N\right) = \max\limits_{\substack{f(x)\in F \\ x\in[-l,\, l]}} \left|a_k - \tilde{a}_k\right|$, $V_{b_k} = V_{b_k}\left(F,\, N\right) = \max\limits_{\substack{f(x)\in F \\ x\in[-l,\, l]}} \left|b_k - \tilde{b}_k\right|$ – похибки наближеного обчислення коефіцієнтів $\tilde{a}_0, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$, $k = \overline{1,n}$, $R_n\left(F\right)$ – оцінка лишку ряду Фур'є на класі F при переході від нескінченної суми (7) до скінченної суми (9).

Для апроксимації функції $f(x)\in F$ рядом Фур'є із заданою точністю ε $(\varepsilon > 0)$ при виконанні заданих обмежень на час її розв'язання на комп'ютері $c(Y)$ необхідно забезпечити виконання умови

$$E(F,N,n) = \max\limits_{\substack{f(x)\in F \\ x\in[-l,\, l] \\ T=T(F,N,n,Y)\le T_0}} \left|f\left(x\right) - S_n\left(x,\, f\right)\right| \le \varepsilon . \tag{11}$$

Для апроксимації функції $f(x)\in F$ рядом Фур'є з максимально можливою точністю при заданому обмеженні на час її розв'язання T_0, необхідно розв'язати такі екстремальні задачі:

$$\varepsilon_{\min} = \min\limits_{\substack{N,n \\ T\le T_0}} E(F,N,n) = \varepsilon^0 \tag{12}$$

або (якщо N задане)

$$\varepsilon_{\min} = \min\limits_{\substack{n \\ T\le T_0}} E(F,N,n) = \varepsilon^0 . \tag{13}$$

Розглянуті наступні класи функцій:

$C_{L,\alpha}$ – клас функцій, визначених на відрізку $[-l,l]$, які задовільняють умову Гельдера з константою L і показником α, $0<\alpha\le 1$: $\left|f(x') - f(x'')\right| \le L\left|x' - x''\right|^{\alpha}$, $x',\, x'' \in \left[-l,l\right]$;

C_L – клас функцій, визначених на відрізку $[-l,l]$, які задовільняють умову: $\left|f(x') - f(x'')\right| \le L\left|x' - x''\right|$, $x',\, x'' \in \left[-l,l\right]$ (клас функцій Липшиця (клас $C_{L,\alpha}$, $\alpha = 1$));

$C_{L,N}$ – клас функцій C_L із заданими фіксованими значеннями f_i у вузлах фіксованої сітки x_i, $i = \overline{0, N-1}$.

Відомо [1], що у вищенаведених класах функцій ряд Фур'є збіжний, оскільки виконуються відомі ознаки збіжності (Ліпшиця, Дирихле), тому можна стверджувати, що періодичну з періодом 2l функцію $f(x)\in F$ можна представити рядом Фур'є (7), (8).

2. Апроксимація функцій деяких класів рядами Фур'є: алгоритми та оцінки їх основних характеристик. У роботах [6, 7] отримані оцінки похибки запропонованих алгоритмів апроксимації з використанням для обчислення коефіцієнтів Фур'є оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з вищенаведених класів функцій, наведені відповідні квадратурні формули.

Для розв'язання задачі апроксимації функції $f(x)\in F$ рядом Фур'є із заданою або максимально можливою точністю з використанням ефективних алгоритмів розв'язання оптимізаційних задач (11) – (13) [5] необхідно отримати оцінки обчислювальної складності (часу реалізації T) наведених вище алгоритмів, які дозволять задавати реальні обмеження T_0 .

Теорема 1 [6]. Якщо періодична з періодом $2l$ функція $f(x) \in C_{L,\alpha}$, $x \in [-l, l]$, апроксимується рядом Фур'є вигляду (9), де коефіцієнти $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ визначаються за допомогою оптимальних за порядком точності при $N \geq \frac{n\pi}{l}$ квадратурних формул вигляду:

$$R_{1,a}(k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} f_\nu \int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}} \cos\frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 0,1,2,...,$$
$$R_{1,b}(k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} f_\nu \int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}} \sin\frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 0,1,2,..., \tag{14}$$

де $f_\nu = f(x_\nu)$, $x_\nu = \nu \cdot \Delta x_\nu$, $\Delta x_\nu = x_{\nu+1} - x_\nu$, $x_{\nu-1/2} = x_\nu - \Delta x_\nu/2$, $x_{\nu+1/2} = x_\nu + \Delta x_{\nu+1}/2$, $\nu = \overline{0, N-1}$, $\Delta x_{-1} = 0$, $x_0 = -l$, $x_{N-1+1/2} = x_N = l$.

Тоді похибка апроксимації функції має вигляд

$$E_{C_{L,\alpha}} \leq |R_n(f)| + \frac{V_{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{n}(V_{a_k} + V_{b_k}) < C_1(\alpha)\left(1 - \frac{C_2(\alpha)}{(n+1/2)^\alpha}\right) + C_3(\alpha)\frac{2n+1/2}{l(2N)^\alpha}, \tag{15}$$

де $C_1(\alpha) = \frac{Ll^\alpha}{\alpha}$, $C_2(\alpha) = \frac{1}{(\alpha+1)\pi^\alpha}$, $C_3(\alpha) = \frac{L(2Cl)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ константа C визначається співвідношенням $\max\limits_{0 \leq \nu \leq N-1} \Delta x_\nu = \frac{2Cl}{N}$.

Доведення теореми наведено в роботі [6].

Теорема 2. Оцінка обчислювальної складності алгоритму $S_n(x, f)$ (9) з використанням квадратурних формул (14) має вигляд

$$T_1(n, N) \leq (7(N-1)+n)\tau_1 + (2n+3)N\tau_2 + (n+3)\tau_3 + (N+1)\tau_4 + nN\tau_5, \tag{16}$$

де τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 – час виконання операцій додавання, множення, ділення, двійкового зсуву числа відповідно, τ_5 – час, необхідний для обчислення функції $\sin x$ або $\cos x$ на комп'ютері. Якщо $\{x_i\}_0^{N-1}$ – рівномірна сітка ($x_\nu = -l + \nu \cdot \Delta x$, $\Delta x = 2l/N$, $\nu = \overline{0, N-1}$), оцінка часу реалізації $S_n(x, f)$ оцінюється співвідношенням

$$T_2(n, N) \leq (3(N-1)+n)\tau_1 + 2((n+1)N-1)\tau_2 + (n+4)\tau_3 + 2\tau_4 + nN\tau_5. \tag{17}$$

Доведення. Для доведення оцінки (16) наведемо квадратурні формули (14) і функцію $S_n(x, f)$, що визначається співвідношенням (9), до вигляду, зручного для їх чисельної реалізації (програмування). Отримаємо:

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1} f_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} dx = \frac{1}{2l}\left(\sum_{i=0}^{N-2}\left(f_i + f_{i+1}\right)\Delta x_i + 2 f_{N-1}\Delta x_{N-1}\right),$$

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1} f_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \cos\frac{k\pi}{l} x dx = \frac{1}{k\pi}\sum_{i=0}^{N-2}\left(-\Delta f_i \sin\frac{k\pi}{l} x_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1} f_i \int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sin\frac{k\pi}{l} x dx = \frac{1}{k\pi}\left(\sum_{i=0}^{N-2} \Delta f_i \cos\frac{k\pi}{l} x_{i+\frac{1}{2}} + (-1)^{k+1}\left(f_{N-1} - f_0\right)\right),$$

$$S_n(x, f) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k \cos\frac{k\pi x}{l} + \tilde{b}_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right) = \frac{1}{4l}\left(\sum_{i=0}^{N-2}\left(f_i + f_{i+1}\right)\Delta x_i + 2 f_{N-1}\Delta x_{N-1}\right) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left\{\left(f_{N-1} - f_0\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(-1)^{k+1}\sin\frac{k\pi}{l}x + \sum_{i=0}^{N-2}\Delta f_i \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{l}\left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right)\right\},$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \ \Delta f_i = f_{i+1} - f_i .$$

Щоб обчислити $S_n(x, f)$ за даною формулою, необхідно виконати $7(N-1)+n$ операцій додавання двох чисел, $(2n+3)N$ операцій множення, $n+3$ операцій ділення, $N+1$ операцій двійкового зсуву числа і nN разів обчислити функцію $\sin x$. Звідси отримуємо оцінку (16).

У випадку рівномірної сітки функція $S_n(x, f)$ зводиться до вигляду:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{2N}\left(\sum_{i=0}^{N-1} f_i + \frac{f_0 + f_N}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{N-2} f_i \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{N}\cos\frac{k\pi}{l}\left(x - x_i\right).$$

Щоб обчислити $S_n(x, f)$ за даною формулою, необхідно виконати $3(N-1)+n$ операцій додавання двох чисел, $2((n+1)N-1)$ операцій множення, $n+4$ операцій ділення, 2 операції двійкового зсуву числа і nN разів обчислити функції $\sin x$, $\cos x$. Звідси отримуємо оцінку (17).

Теорему доведено.

У випадку, якщо $\alpha = 1$, то функція $f(x) \in C_L$, $x \in [-l, l]$, похибка апроксимації має вигляд.

Теорема 3 [7]. Нехай періодична з періодом $2l$ функція $f(x) \in C_L$, $x \in [-l, l]$, апроксимується рядом Фур'є вигляду (9), де коефіцієнти $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ визначаються за допомогою оптимальних за порядком точності при $N \ge n\pi/l$ квадратурних формул вигляду:

$$R_{1,a}(k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} f_\nu \int\limits_{x_\nu - 1/2}^{x_\nu + 1/2} \cos\frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 0,1,2,...,$$

$$R_{1,b}(k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} f_\nu \int\limits_{x_\nu - 1/2}^{x_\nu + 1/2} \sin\frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 0,1,2,...,$$

де $f_\nu = f(x_\nu)$, $x_\nu = \nu \cdot \Delta x_\nu$, $\Delta x_\nu = x_{\nu+1} - x_\nu$, $x_{\nu-1/2} = x_\nu - \Delta x_\nu/2$, $x_{\nu+1/2} = x_\nu + \Delta x_{\nu+1}/2$, $\nu = \overline{0, N-1}$, $\Delta x_{-1} = 0$, $x_0 = -l$, $x_{N-1+1/2} = x_N = l$.

Тоді похибка апроксимації функції

$$E_{C_L} < \frac{4Ll}{\pi}\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{2 + \ln\pi}{n}\right) + \frac{L}{l}\left\{\sum_{\nu=0}^{N-2}\left[\frac{\Delta^2 x_\nu}{8} + 4\frac{l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{k\pi\Delta x_\nu}{4l}\right.\right. \times$$

$$\times\left(\left|\cos\frac{k\pi x_{\nu+1/2}}{l}\right|+\left|\sin\frac{k\pi x_{\nu+1/2}}{l}\right|\right)\Bigg]\Bigg]+\frac{\Delta^2 x_{N-1}}{4}+\sum_{k=1}^{n}\Big(P_{a,1}(k)+P_{b,1}(k)\Big)\Bigg\}, \tag{18}$$

де

$$P_{a,1}(k)=\frac{l}{\pi k}\left|\Delta x_{N-1}\sin k\pi-\frac{2l}{k\pi}\sin\left(k\pi-\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right)\sin\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right|,$$

$$P_{b,1}(k)=\frac{l}{\pi k}\left|\Delta x_{N-1}\cos k\pi-\frac{2l}{k\pi}\cos\left(k\pi-\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right)\sin\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right|,$$

$$\Delta x_\nu = x_{\nu+1}-x_\nu .$$

Доведення теореми наведено в роботі [7].

Якщо $\{x_i\}_0^{N-1}$ – рівномірна сітка ($x_\nu=-l+\nu\cdot\Delta x$, $\Delta x=2l/N$, $\nu=\overline{0,N-1}$), оцінки V_{a_k}, V_{b_k}, $k=1,2,3,...$ мають вигляд [1, 7]:

$$V_{i_k}\le\frac{2L}{\pi N}+P_{i,1}(k)\,,\ i=a,b\,, \tag{19}$$

де

$$P_{a,1}(k)=\frac{L}{\pi k}\left|\frac{2l}{k\pi}\sin\left(k\pi-\frac{k\pi}{2lN}\right)\sin\frac{k\pi}{2lN}-\frac{\sin k\pi}{N}\right|,$$

$$P_{b,1}(k)=\frac{L}{\pi k}\left|\frac{2l}{k\pi}\cos\left(k\pi-\frac{k\pi}{2lN}\right)\sin\frac{k\pi}{2lN}-\frac{\cos k\pi}{N}\right|$$

і похибка апроксимації (16) має вигляд:

$$E_{C_L}<\frac{4Ll}{\pi}\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{2+\ln\pi}{n}\right)+\frac{Ll}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)+\frac{4Ln}{\pi N}+\sum_{k=1}^{n}\Big(P_{a,1}(k)+P_{b,1}(k)\Big). \tag{20}$$

Зауваження 1. На практиці, як правило, достатньо використовувати оцінки V_{i_k}, $i=a,b$, записані з точністю до головного члена відносно величини $1/N$: $V_{i_k}\sim\frac{2L}{\pi N}$, $i=a,b$. Тоді похибка апроксимації $E_{C_L}\sim\frac{4Ll}{\pi}\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{2+\ln\pi}{n}\right)+\frac{4L}{N}\left\{\frac{n}{\pi}+\frac{1}{4l}\right\}$.

Звузимо розглянутий клас функцій Ліпшиця C_L на клас $C_{L,N}$. Для цього класу в [1, 2] побудовані оптимальні за точністю при $N\ge\frac{n\pi}{l}$ квадратурні формули вигляду:

$$\begin{aligned}R_{2,a}(k)&=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}f_2^*(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx,\quad k=0,1,2,...,\\ R_{2,b}(k)&=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}f_2^*(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx,\quad k=1,2,3,...,\end{aligned} \tag{21}$$

де

$$f_2^*(x)=\left\{\begin{array}{ll} f_\upsilon\ , & x_\upsilon \le x \le \bar{x}_\upsilon, \\ f_\upsilon + L(x-x_\upsilon)sign(\Delta f_\upsilon), & \bar{x}_\upsilon \le x \le \bar{\bar{x}}_\upsilon, \\ f_{\upsilon+1}\ , & \bar{\bar{x}}_\upsilon \le x \le x_{\upsilon+1}, \\ f_{N-1}\ , & x_{N-1} \le x \le x_N , \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} x \notin [x_{N-1}, x_N]\ , \tag{22}$$

$$\bar{x}_\upsilon = \frac{x_\upsilon + x_{\upsilon+1}}{2} - \frac{|\Delta f_\upsilon|}{2L},\ \ \bar{\bar{x}}_\upsilon = \frac{x_\upsilon + x_{\upsilon+1}}{2} + \frac{|\Delta f_\upsilon|}{2L},\ \ \Delta f_\nu = f_{\nu+1} - f_\nu .$$

У випадку, коли періодична з періодом $2l$ функція $f(x) \in C_{L,N}$, $x \in [-l,l]$, апроксимується рядом Фур'є вигляду (9), де коефіцієнти $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ обчислюються за допомогою квадратурних формул вигляду (21), (22), то оцінка похибки апроксимації має вигляд [1, 7]:

$$\begin{gathered} E_{C_{L,N}} < \frac{4Ll}{\pi}\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{2+\ln\pi}{n}\right) + \frac{L}{l}\left\{\sum_{\nu=0}^{N-2}\left[\frac{\Delta^2 x_\nu}{8} - \frac{\Delta^2 f_\nu}{8L^2} + \right.\right. \\ +4\frac{l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(\sin^2\frac{k\pi\Delta x_\nu}{4l} - \sin^2\frac{k\pi|\Delta f_\nu|}{4Ll}\right)\left(\left|\cos\frac{k\pi(x_\nu + x_{\nu+1})}{2l}\right| + \right. \\ \left.\left.\left. + \left|\sin\frac{k\pi(x_\nu + x_{\nu+1})}{2l}\right|\right)\right] + \frac{\Delta^2 x_{N-1}}{4} + \sum_{k=1}^{n}\left(P_{a,2}(k) + P_{b,2}(k)\right)\right\}, \end{gathered} \tag{23}$$

де

$$\Delta f_\nu = f_{\nu+1} - f_\nu,\ \ P_{a,2}(k) = \frac{l}{\pi k}\left|\Delta x_{N-1}\sin k\pi - \frac{2l}{k\pi}\sin\left(k\pi - \frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right)\sin\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right|,$$

$$P_{b,2}(k) = \frac{L}{\pi k}\left|\Delta x_{N-1}\cos k\pi - \frac{2l}{k\pi}\cos\left(k\pi - \frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right)\sin\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right|.$$

Теорема 4. Оцінка обчислювальної складності алгоритму $S_n(x,f)$ (9) з використанням квадратурної формули (21), (22) має вигляд:

$$\begin{gathered} T_3(n,N) \le \left((n+4)(2N-1)-3\right)\tau_1 + \left(5nN + 2(N-n+1)\right)\tau_2 + \\ +(n+4)\tau_3 + (3N-2)\tau_4 + n(3N-2)\tau_5, \end{gathered} \tag{24}$$

де τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5 позначають ті ж величини, що і в співвідношенні (16).

Доведення. Для доведення оцінки (24) наведемо квадратурні формули (21), і функцію $S_n(x,f)$, що визначається співвідношенням (9), до вигляду, зручного для їх чисельної реалізації (програмування). Отримаємо:

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_2^*(x)dx = \frac{1}{l}\left(\sum_{i=0}^{N-2}\left(\frac{f_i + f_{i+1}}{2}\Delta x_i - x_i\Delta f_i\right) + f_{N-1}\Delta x_{N-1}\right),$$

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_2^*(x)\cos\frac{k\pi}{l}x dx = \frac{1}{k\pi}\sum_{i=0}^{N-2}\left[\left(\frac{sign(\Delta f_i)L}{2}\Delta x_i - \frac{\Delta f_i}{2}\right)\left(\sin\frac{k\pi}{l}\overline{\overline{x}}_i - \sin\frac{k\pi}{l}\overline{x}_i\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{sign(\Delta f_i)Ll}{k\pi}\left(\cos\frac{k\pi}{l}\overline{\overline{x}}_i - \cos\frac{k\pi}{l}\overline{x}_i\right)\right],$$

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_2^*(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx = \frac{1}{k\pi}\left\{\sum_{i=0}^{N-2}\left[\left(\frac{\Delta f_i}{2} - \frac{sign(\Delta f_i)L}{2}\Delta x_i\right)\left(\cos\frac{k\pi}{l}\overline{\overline{x}}_i - \cos\frac{k\pi}{l}\overline{x}_i\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{sign(\Delta f_i)Ll}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{l}\overline{\overline{x}}_i - \sin\frac{k\pi}{l}\overline{x}_i\right)\right]+(-1)^{k+1}(f_{N-1}-f_0)\right\},$$

$$S_n(x,f) = \frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\tilde{b}_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right) = \frac{1}{2l}\left(\sum_{i=0}^{N-2}\left(\frac{f_i+f_{i+1}}{2}\Delta x_i - x_i\Delta f_i\right)+f_{N-1}\Delta x_{N-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left\{\sum_{i=0}^{N-2}\sin\left(\frac{k\pi}{l}\frac{|\Delta f_i|}{2L}\right)\left[\left(\Delta f_i - sign(\Delta f_i)L\Delta x_i\right)\cos\frac{k\pi}{l}\left(x-x_{i+\frac{1}{2}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{sign(\Delta f_i)Ll}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{l}\left(x-x_{i+\frac{1}{2}}\right)\right]+(-1)^{k+1}(f_{N-1}-f_0)\sin\frac{k\pi}{l}x\right\}.$$

Щоб обчислити $S_n(x,f)$ за даною формулою, необхідно виконати $(n+4)(2N-1)-3$ операцій додавання двох чисел, $5nN+2(N-n+1)$ операцій множення, $n+4$ операцій ділення, $3N-2$ операцій двійкового зсуву числа і $n(3N-2)$ разів обчислити функції $\sin x$, $\cos x$. Звідси отримуємо оцінку (24).

Теорему доведено.

Висновки. Запропоновано ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій $f(x)\in F$ із класів F за допомогою рядів Фур'є з використанням для визначення коефіцієнтів Фур'є оптимальних за точністю на класах F і близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій. Проведено комплексний аналіз якості розроблених алгоритмів. Отримано оцінки їх обчислювальної складності.

Список літератури

1. Задирака В.К., Мельникова С.С. Цифровая обработка сигналов. К.: Наукова думка, 1993. 294 с.
2. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Мельникова С.С., Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. **Т.** 1. Алгоритми. Київ: Наукова думка, 2011. 447 с. **Т.** 2. Застосування. Київ: Наукова думка, 2011. 346 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Физматлит, 2001. 662 с.
4. Stepanets A.I. Methods of Approximation Theory. VSP: Leiden, Boston, 2005. 919 p. https://doi.org/10.1515/9783110195286
5. Задірака В.К., Бабич М.Д., Березовський А.І. та ін. *T*-ефективні алгоритми наближеного розв'язання задач обчислювальної та прикладної математики. Тернопіль: Збруч, 2003. 261 с.

6. Коломис О.М. Ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій із класу Гельдера рядами Фур’є. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. № 32. С. 159–164. https://doi.org/10.15407/fmmit2021.32.159
7. Коломис О.М., Луц Л.В. Ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій із класу Ліпшиця рядами Фур’є. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2023. № 36. С. 111–115. https://doi.org/10.15407/10.15407/fmmit2023.36.111

Одержано 04.03.2024

Коломис Олена Миколаївна,
кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
https://orcid.org/0000-0001-7174-1381
kolomys@ukr.net

УДК 519.64; 519.65

О.М. Коломис

Оптимальне за точністю відновлення деяких класів функцій за допомогою рядів Фур’є

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ
Листування: kolomys@ukr.net

Вступ. Апроксимація (наближення або відновлення) функцій широко використовується для аналізу даних, побудови моделей і прогнозування. Мета апроксимації функцій полягає у тому, щоб знайти функцію, яка найкраще наближає вихідну функцію. Це може бути корисно, коли вихідна функція надто складна для аналізу або коли потрібно спростити модель для ефективнішого обчислення чи інтерпретації. Апроксимація функцій – це важливий інструмент у науці, інженерії, економіці та інших галузях, де потрібен аналіз і моделювання даних. Вона дає змогу спростити складні функції, виявити закономірності у поведінці об’єкта дослідження, а також передбачити значення функції поза доступними даними.

Мета роботи. Розглядаються задачі апроксимації функції, яка на деякому проміжку задана своїми значеннями у деякому наборі вузлових точок і належить деякому класу функцій тригонометричним рядом Фур'є із заданою точністю і при виконанні заданих обмежень на час її виконання. Основну увагу приділено отриманню оцінок обчислювальної складності (часу реалізації) та вирішенню задачі апроксимації функції рядами Фур'є із заданою або максимально можливою точністю з використанням ефективних алгоритмів розв'язання оптимізаційних задач.

Результати. Наведено загальну постановку розв'язування задачі апроксимації функцій рядами Фур’є відповідно до технології розв'язування задач обчислювальної та прикладної математики із заданими значеннями характеристик якості. Наведено оцінки похибки запропонованих алгоритмів апроксимації з використанням для обчислення коефіцієнтів Фур'є оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із класів Гельдера та Ліпшиця із заданими фіксованими значеннями у вузлах фіксованої сітки. Наведено відповідні квадратурні формули та конструктивні оцінки похибки методу апроксимації функцій вказаних класів. Отримано оцінки обчислювальної складності наведених алгоритмів, які дають змогу задавати реальні обмеження на час реалізації алгоритму із заданою або максимально можливою точністю.

Висновки. Проведено комплексний аналіз якості розглянутих алгоритмів апроксимації функцій рядами Фур'є з використанням для обчислення коефіцієнтів Фур'є оптимальних за точністю (або близьких до них) квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій. Отримано оцінки їхніх основних характеристик – точності та обчислювальної складності.

Ключові слова: апроксимація функцій, ряди Фур’є, коефіцієнти ряду Фур'є, похибка апроксимації, обчислювальна складність.

UDC 519.64; 519.65

Olena Kolomys

Optimal with Respect to Accuracy Recovery of Some Classes Functions by Fourier Series

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
Correspondence: kolomys@ukr.net

Introduction. Function approximation (approximation or restoration) is widely used in data analysis, model building, and forecasting. The goal of function approximation is to find the function that best approximates the original function. This can be useful when the original function is too complex to analyze or when a model needs to be simplified for more efficient computation or interpretation. Function approximation is an important tool in science, engineering, economics, and other fields where data analysis and modeling are required. It allows you to simplify complex functions, identify patterns in the behavior of the object of study, and predict the value of a function beyond the available data.

The purpose of the paper is consider the problems of approximation of a function, which on some interval is given by its values in some set of nodal points and belongs to some class of functions by trigonometric Fourier series with a given accuracy and at fulfillment of given constraints on its execution time. The main attention is paid to obtaining estimates of computational complexity (implementation time) and solving the problem of function approximation by Fourier series with a given or maximum possible accuracy using efficient algorithms for solving optimization problems.

Results. The general formulation of the problem of approximation of functions by Fourier series in accordance with the technology of solving problems of computational and applied mathematics with specified values of quality characteristics is presented. Estimates of the error of the proposed approximation algorithms using for the computation of Fourier coefficients the optimal in accuracy and close to them quadrature formulas for the computation of integrals from rapidly oscillating functions of the classes of Helder and Lipschitz with given fixed values in the nodes of a fixed grid are given. The corresponding quadrature formulas and constructive estimates of the error of the method of approximation of functions of the specified classes are given. Estimates of computational complexity of the given algorithms are obtained, which allow us to set real constraints on the time of algorithm implementation with a given or maximum possible accuracy.

Conclusions. A comprehensive analysis of the quality of the considered algorithms for the approximation of functions by Fourier series using the accuracy-optimal (or close to them) quadrature formulas for the computation of Fourier coefficients for the computation of integrals from rapidly oscillating functions is presented. The estimates of their main characteristics – accuracy and computational complexity – are obtained.

Keywords: function approximation, Fourier series, Fourier series coefficients, approximation error, computational complexity.