

ТРИ ЕЛІПСОЇДИ ДЛЯ ЗОВНІШНЬОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НАПІВКУЛІ

Вступ. Еліпсоїди, які апроксимують напівкулю в \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) і їх об'єм є меншим ніж об'єм самої кулі, можуть бути використані для побудови алгоритмів розв'язання ряду задач. До таких задач належать задача мінімізації опуклої (гладкої або негладкої) функції, задача мінімізації опуклої функції на кулі, загальна задача опуклого програмування, задача про сідлову точку опукло-увігнутих функцій та інші [1, 2].

Швидкість збіжності таких алгоритмів буде визначатися відношенням об'єму апроксимуючого еліпсоїда до об'єму кулі і чим це відношення буде меншим, тим швидше алгоритм буде збігатися за такою характеристикою, як монотонне зменшення об'єму області локалізації розв'язку тієї чи іншої задачі.

У статті описано властивості трьох еліпсоїдів для апроксимації n -вимірної напівкулі, коефіцієнт зменшення об'єму яких залежить тільки від n – вимірності простору. Перший – це відомий еліпсоїд мінімального об'єму, який використовується в класичному методі еліпсоїдів Юдіна – Немировського – Шора [3, 4]. Він забезпечує мінімальний коефіцієнт зменшення об'єму та може бути використаний якщо $n \geq 2$. Якщо $n = 1$, то класичний метод еліпсоїдів замінює метод дихотомії, який забезпечує коефіцієнт зменшення об'єму (довжини відрізка) рівним $1/2 = 0.5$.

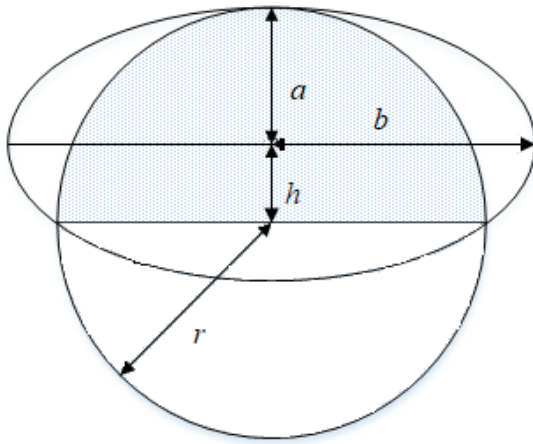
Два інших еліпсоїди є наближеними до еліпсоїда мінімального об'єму і при великих n гарантують близькі до мінімального коефіцієнти зменшення об'єму. Якщо $n = 1$, то перший еліпсоїд [5] забезпечує коефіцієнт зменшення довжини відрізка рівним $2 - \sqrt{2} \approx 0.5858$. Другий еліпсоїд є новим і коефіцієнт зменшення об'єму для нього незначно більший за коефіцієнт для першого еліпсоїда. Якщо $n = 1$, то він забезпечує коефіцієнт зменшення довжини відрізка рівним $(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.6180$.

Для трьох розглянутих еліпсоїдів наведено порівняльні результати за коефіцієнтами зменшення об'єму ($n = 1 \div 20$), та кількістю ітерацій для розв'язання задач з відносною точністю 10^{-10} ($n = 1 \div 30$).

У статті описано властивості трьох еліпсоїдів для апроксимації n -вимірної напівкулі, коефіцієнт зменшення об'єму яких залежить тільки від n – вимірності простору. Перший – це відомий еліпсоїд мінімального об'єму, який використовується в класичному методі еліпсоїдів Юдіна – Немировського – Шора, та забезпечує мінімальний коефіцієнт зменшення об'єму. Два інших еліпсоїди є наближеними до еліпсоїда мінімального об'єму і при великих n гарантують близькі до мінімального коефіцієнти зменшення об'єму. Наближені еліпсоїди застосовують, якщо $n = 1$, де вони забезпечують коефіцієнти зменшення об'єму (довжини відрізка) в $2 - \sqrt{2} \approx 0.5858$ та $(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.6180$ разів. Наведено порівняльні результати за коефіцієнтами зменшення об'єму при $n = 1 \div 20$ та кількістю ітерацій для розв'язання задач з відносною точністю 10^{-10} при $n = 1 \div 30$.

Ключові слова: куля, еліпсоїд, розтяг простору, метод еліпсоїдів, метод дихотомії.

1. Узагальнений еліпсоїд та його властивості. Узагальнений метод еліпсоїдів [6, 7] використовує еліпсоїд, що містить напівкулю радіуса r в \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), і його об'єм є меншим ніж об'єм кулі. Цей еліпсоїд має сплюснену форму в напрямі нормалі до гіперплощини, що визначає напівкулю. Параметри еліпсоїда показано на рис.1, де a – довжина малої півосі еліпсоїда, b – довжина великих півосей еліпсоїда (кількість таких півосей дорівнює $n-1$), h – відстань від центра кулі до центра еліпсоїда в напрямку його малої півосі. Вони виражені через коефіцієнт $\alpha = b/a$ – коефіцієнт розтягу простору в напрямі малої півосі еліпсоїда.



$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) r, \\ b &= \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) r, \\ h &= \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha^2} r. \end{aligned}$$

РИС. 1. Параметри узагальненого еліпсоїда, що містить напівкулю в \mathbb{R}^n

Об'єм узагальненого еліпсоїда дорівнює $v_e = v_0 ab^{n-1}$, а об'єм кулі $v_b = v_0 r^n$, де v_0 позначає об'єм одиничної кулі в \mathbb{R}^n . Коефіцієнт зменшення об'єму дорівнює

$$\frac{v_e}{v_b} = \left(\frac{a}{r} \right) \left(\frac{b}{r} \right)^{n-1} = \left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{b}{r} \right)^n = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n = q_n(\alpha). \quad (1)$$

Якщо α задовольняє умові

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} < 2\sqrt[n]{\alpha}, \quad (2)$$

то ми можемо гарантувати, що $q_n(\alpha) < 1$.

Щоб перетворити узагальнений еліпсоїд у нову кулю, достатньо розтягнути вихідний простір у напрямку малої півосі з коефіцієнтом $\alpha = b/a$. Це можна зробити за допомогою оператора розтягу простору $R_\alpha(\xi)$ [1, ст. 69], де ξ – напрямок розтягу, який збігається з напрямком малої півосі еліпсоїда. Його матрична форма має такий вид:

$$R_\alpha(\xi) = I_n + (\alpha - 1)\xi\xi^T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi\| = 1, \quad (3)$$

де $(\cdot)^T$ – транспонування, $\|\cdot\|$ – евклідова норма, I_n – одинична матриця порядку n .

Якщо $X = \mathbb{R}^n$ є вихідним простором, то в перетвореному просторі ми отримаємо нову кулю радіуса b , яка містить усі точки напівкулі. Повторюючи ту ж процедуру, але для нової кулі в перетвореному просторі, отримуємо узагальнений метод еліпсоїдів. При цьому обчислюється ξ_k –

напрямок малої півосі еліпсоїда у перетвореному просторі $Y_k = B_k^{-1}X$ та виконується перехід до його центру. Розрахований напрямок використовується для наступного розтягу простору за допомогою оператора (3), який реалізується шляхом перерахунку матриці $B_{k+1} = B_k R_\beta(\xi_k)$, де $\beta = 1/\alpha$. У наступному перетвореному просторі $Y_{k+1} = B_{k+1}^{-1}X$ ми отримаємо кулю радіуса r_{k+1} .

2. Еліпсоїд мінімального об'єму. Щоб отримати еліпсоїд мінімального об'єму, що містить напівкулю в \mathbb{R}^n , знайдемо такий коефіцієнт розтягу α^* , при якому $q_n(\alpha)$ згідно формули (1) досягає мінімуму. Для цього знайдемо похідну $q_n'(\alpha)$

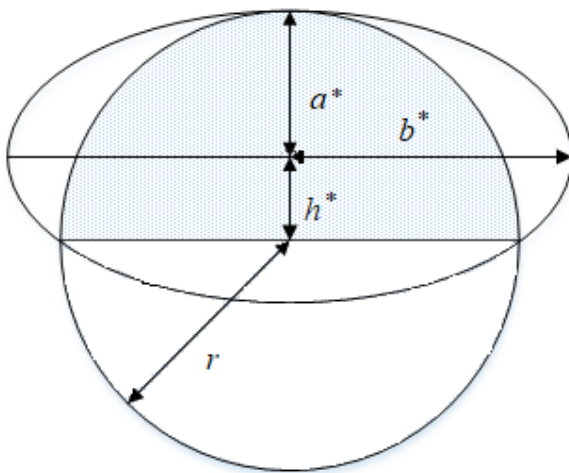
$$\begin{aligned} q_n'(\alpha) &= \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n \right)' = -\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right) \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^{n-1} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^{n-1} \left(-\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2\alpha^3} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^{n-1} \left(-(\alpha^2 + 1) + n(\alpha^2 - 1) \right), \end{aligned}$$

та прирівнявши її до нуля отримаємо для α^* таке рівняння:

$$-(\alpha^*)^2 + 1 + n((\alpha^*)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (n-1)(\alpha^*)^2 - (n+1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha^*)^2 = \frac{n+1}{n-1}.$$

Звідси випливає, що $\alpha^* = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$, яке задовольняє умові (2).

Параметри еліпсоїда мінімального об'єму показано на рис. 2, де a^* – довжина його малої півосі, b^* – довжина великих півосей (їх кількість дорівнює $n-1$), h^* – відстань від центра кулі до центра еліпсоїда в напрямку його малої півосі.



$$\begin{aligned} a^* &= r \frac{n}{n+1}, \\ b^* &= r \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}, \\ h^* &= r \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

РИС. 2. Параметри еліпсоїда мінімального об'єму, що містить напівкулю в \mathbb{R}^n

Відношення об'єму еліпсоїда мінімального об'єму до об'єму кулі можна записати у вигляді

$$q_n(\alpha^*) = \left(\frac{a^*}{r}\right)\left(\frac{b^*}{r}\right)^{n-1} = \frac{1}{\alpha^*} \left(\frac{1}{2}\left(\alpha^* + \frac{1}{\alpha^*}\right)\right)^n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^{n-1} < 1. \quad (4)$$

Коефіцієнт зменшення об'єму $q_n(\alpha^*)$ оцінюється таким чином:

$$\begin{aligned} q_n(\alpha^*) &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} < \exp\left(-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \exp\left(\frac{n-1}{2(n^2-1)}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2(n+1)}\right) = \exp\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)}\right) = \exp\left\{-\frac{1}{2(n+1)}\right\}. \end{aligned}$$

Для $q_n(\alpha^*)$ згідно формули (4) в роботі [8, ст.77] наведено більш точну оцінку $q_n(\alpha^*) < \exp\left\{-\frac{1}{2n}\right\} < 1$. Дійсно, враховуючи, що

$$\exp\left\{\frac{1}{n}\right\} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

і використовуючи розклад у степеневий ряд $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (x-1)^k / k$ для $0 < x \leq 2$ отримаємо

$$\begin{aligned} (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{n+1}{kn^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n-1}{kn^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{kn^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(n-1)}{2kn^{2k}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)n^{2k-1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2kn^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kn^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kn^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)k} \frac{1}{n^{2k-1}} > \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Довжина великої півосі еліпсоїду мінімального об'єму (рис. 2) визначається за формулою $b^* = r \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$, яка не має сенсу при $n=1$. Тому, коефіцієнт зменшення об'єму з урахуванням одновимірного випадку $n=1$ можна задати формулою згідно з [9, ст. 74]

$$q(n) = \begin{cases} q_n(\alpha^*), & \text{при } n \geq 2; \\ 1/2, & \text{при } n = 1, \end{cases}$$

з якої випливає, що якщо $n \geq 2$, то потрібно використовувати еліпсоїд мінімального об'єму, а якщо $n = 1$, то потрібно використовувати поділ відрізка пополам.

3. Наближений еліпсоїд. В роботі [5] напівкуля в \mathbb{R}^n апроксимується не еліпсоїдом мінімального об'єму, а близьким до нього еліпсоїдом, де коефіцієнт $q_n(\alpha)$ апроксимується функцією $Q_n(\alpha)$

$$q_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2\right)\right)^n \leq \frac{1}{\alpha} \exp\left\{\frac{n}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2\right)\right\} =: Q_n(\alpha).$$

Щоб знайти такий коефіцієнт розтягу α^{**} , при якому $Q_n(\alpha^{**})$ досягає мінімуму, знайдемо похідну $Q_n'(\alpha)$

$$Q_n'(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} \exp \left\{ \frac{n}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 \right) \right\} \right)'_{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2} \exp \left\{ \frac{n}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 \right) \right\} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right) \exp \left\{ \frac{n}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 \right) \right\} =$$

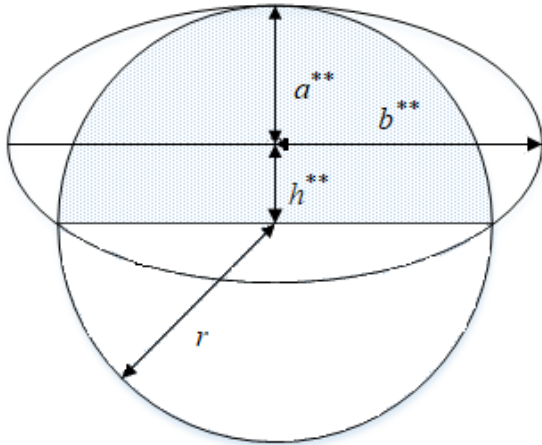
$$= \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ \frac{n}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 \right) \right\} \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right) = \frac{1}{2\alpha^3} \exp \left\{ \frac{n}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 \right) \right\} (-2\alpha + n(\alpha^2 - 1)),$$

та, прирівнявши її до нуля, отримаємо для α^{**} таке рівняння:

$$-2\alpha^{**} + n((\alpha^{**})^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha^{**})^2 - \frac{2}{n}\alpha^{**} - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^{**} = \frac{2/n + \sqrt{(2/n)^2 + 4}}{2}.$$

Звідси випливає, що коефіцієнт розтягу простору $\alpha^{**} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}$.

Параметри наближеного еліпсоїда показано на рис. 3, де a^{**} – довжина його малої півосі, b^{**} – довжина великих півосей (їх кількість дорівнює $n-1$), h^{**} – відстань від центра кулі до центра еліпсоїда у напрямку малої півосі.



$$a^{**} = r \left(1 - \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} \right) \right),$$

$$b^{**} = r \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}},$$

$$h^{**} = \frac{r}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} \right).$$

РИС. 3. Параметри наближеного еліпсоїда, що містить напівкулю в \mathbb{R}^n

Об'єм наближеного еліпсоїда менший, ніж об'єм кулі, і коефіцієнт зменшення об'єму дорівнює

$$q_n(\alpha^{**}) = \left(\frac{a^{**}}{r} \right) \left(\frac{b^{**}}{r} \right)^{n-1} = \frac{1}{\alpha^{**}} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha^{**} + \frac{1}{\alpha^{**}} \right) \right)^n = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n/2} < 1. \quad (5)$$

Коефіцієнт зменшення об'єму $q_n(\alpha^{**})$ згідно формули (5) оцінюється таким чином:

$$\begin{aligned} q_n(\alpha^{**}) &= \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n/2} \leq \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4n^4}} - \frac{1}{n} \right) \exp \left\{ \frac{1}{2n} \right\} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} \right) \exp \left\{ \frac{1}{2n} \right\} \leq \exp \left\{ \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2n} \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right\}. \end{aligned}$$

При великих значеннях n коефіцієнт $q_n(\alpha^{**})$ апроксимується асимптотичною формулою $q_n(\alpha^{**}) \approx 1 - \frac{1}{2n}$, як і коефіцієнт $q_n(\alpha^*)$ для еліпсоїда мінімального об'єму.

В одновимірному випадку для $n=1$ буде гарантовано коефіцієнт зменшення довжини відрізка

$$q_1(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{1+1}-1)(1+1)^{1/2} = (\sqrt{2}-1)\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \approx 0.5858.$$

Таке зменшення довжини відрізка близьке до того, яке забезпечується при використанні методу дихотомії, де $q_1^* = 0.5$, і складає не більше, ніж

$$\frac{q_1(\sqrt{2}+1) - q_1^*}{q_1^*} = \frac{0.5858 - 0.5}{0.5} = \frac{0.0858}{0.5} \approx 0.17 \approx 17\%.$$

4. Новий наближений еліпсоїд. Інший наближений еліпсоїд базується на апроксимації коефіцієнта $q_n(\alpha)$ функцією $\mathbb{Q}_n(\alpha)$

$$q_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2} \right)^{n/2} \leq \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ \frac{n}{8} \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2} \right\} =: \mathbb{Q}_n(\alpha).$$

Щоб знайти такий коефіцієнт розтягу α^{***} , при якому $\mathbb{Q}_n(\alpha^{***})$ досягає мінімуму, знайдемо похідну $\mathbb{Q}_n'(\alpha)$

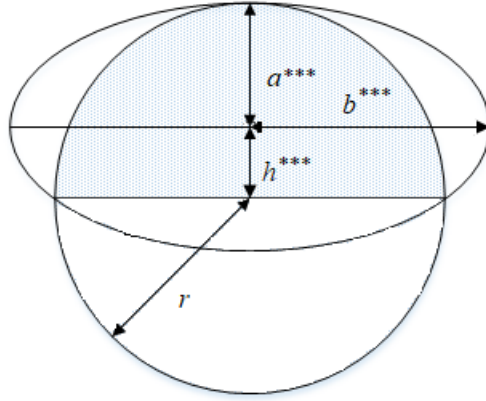
$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_n'(\alpha) &= \left(\frac{1}{\alpha} \exp \left\{ \frac{n}{8} \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2} \right\} \right)' = -\frac{1}{\alpha^2} \exp \left\{ \frac{n}{8} \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2} \right\} + \frac{n}{4\alpha^4} (\alpha^4 - 1) \exp \left\{ \frac{n}{8} \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2} \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{n}{8} \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2} \right\} \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{n}{4\alpha^4} (\alpha^4 - 1) \right) = \frac{1}{4\alpha^4} \exp \left\{ \frac{n}{8} \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2} \right\} (n\alpha^4 - 4\alpha^2 - n), \end{aligned}$$

та прирівнявши її до нуля отримаємо для α^{***} таке рівняння:

$$n(\alpha^{***})^4 - 4(\alpha^{***})^2 - n = 0 \Leftrightarrow (\alpha^{***})^2 = \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} + \frac{2}{n}.$$

Звідси знаходимо коефіцієнт розтягу простору $\alpha^{***} = \sqrt{\sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} + \frac{2}{n}}$.

Параметри нового наближеного еліпсоїда показано на рис. 4, де a^{***} – довжина його малої півосі, b^{***} – довжина великих півосей (їх кількість дорівнює $n-1$), h^{***} – відстань від центра кулі до центра еліпсоїда у напрямку його малої півосі.



$$a^{***} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n}} \right) r,$$

$$b^{***} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}} r,$$

$$h^{***} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{n} - \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right) r.$$

РИС. 4. Параметри нового наближеного еліпсоїда, що містить напівкулю в \mathbb{R}^n

Об'єм наближеного еліпсоїда менший, ніж об'єм кулі, і коефіцієнт зменшення об'єму дорівнює

$$q_n(\alpha^{***}) = \left(\frac{a^{***}}{r} \right) \left(\frac{b^{***}}{r} \right)^{n-1} = \frac{1}{\alpha^{***}} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha^{***} + \frac{1}{\alpha^{***}} \right) \right)^n = \sqrt{\sqrt{1 + \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n}} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right) \right)^{n/2}} < 1. \quad (6)$$

Коефіцієнт зменшення об'єму $q_n(\alpha^{***})$ згідно формули (6) оцінюється таким чином:

$$q_n(\alpha^{***}) = \sqrt{\sqrt{1 + \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n}} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right) \right)^{n/2}} \leq \sqrt{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{n^2} \right)^2 - \frac{2}{n}} \left(\frac{1}{2} \left(1 + 1 + \frac{2}{n^2} \right) \right)^{n/2}} =$$

$$= \left(1 + \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n/2} \leq \exp \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2n} \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} \right\}.$$

При великих значеннях n коефіцієнт $q_n(\alpha^{***})$ апроксимується асимптотичною формулою

$$q_n(\alpha^{***}) \approx 1 - \frac{1}{2n}, \text{ як і коефіцієнт зменшення об'єму } q_n(\alpha^*).$$

В одновимірному випадку для $n=1$ буде гарантовано коефіцієнт зменшення довжини відрізка

$$q_1(\sqrt{\sqrt{5}+1}) = \sqrt{\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2^2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180.$$

Дане зменшення довжини відрізка близьке до того, яке забезпечується при використанні методу дихотомії ($q_1^* = 0.5$) і складає не більше, ніж

$$\frac{q_1(\sqrt{\sqrt{5}+1}) - q_1^*}{q_1^*} = \frac{0.6180 - 0.5}{0.5} = \frac{0.118}{0.5} \approx 0.236 \approx 23,6\%.$$

Коефіцієнт $q_1(\sqrt{\sqrt{5}+1})$ для нового наближеного еліпсоїду незначно більший за коефіцієнт $q_1(\sqrt{2}+1)$ і це збільшення складає

$$\frac{q_1(\sqrt{\sqrt{5}+1}) - q_1(\sqrt{2}+1)}{q_1(\sqrt{2}+1)} = \frac{0.6180 - 0.5858}{0.5858} = \frac{0.0322}{0.5858} \approx 0.055 \approx 5,5\% .$$

5. Порівняльний аналіз коефіцієнтів зменшення об'єму. При великих значеннях n алгоритми, що використовують перший та другий наближені еліпсоїди, будуть близькими до класичного методу еліпсоїдів за швидкістю збіжності. Це підтверджують результати розрахунків на рис. 5, звідки видно, що при зростанні вимірності простору об'єми наближених еліпсоїдів близькі до об'єму мінімального еліпсоїда. Так, наприклад, якщо $n=100$, то Δq – різниця між об'ємами наближеного еліпсоїда та мінімального еліпсоїда складає близько 10^{-25} для першого наближеного еліпсоїда та 10^{-23} для другого. Якщо $n=50$, то відповідні Δq складають 10^{-21} і 10^{-20} .

В табл. 1 наведено значення коефіцієнтів зменшення об'єму для еліпсоїда мінімального об'єму $q_n(\alpha^*)$, двох наближених еліпсоїдів $q_n(\alpha^{**})$ і $q_n(\alpha^{***})$ та їх порівняння при $n=1 \div 30$. Вони представлені з точністю до семи знаків після коми. Обчислення проводилися на персональному комп'ютері із процесором AMD Ryzen 5 4500U 2.38 GHz, 16 GB у системі Windows 10 за допомогою GNU Octave версії 6.2.0.

В першому рядку табл. 1 відображено результати для одновимірного випадку, де значення NaN означає, що під час обчислень виникла помилка ділення на нуль. Це пов'язано з тим, що еліпсоїд мінімального об'єму невизначений при $n=1$. З останніх стовпчиків таблиці видно, що відношення $q_n(\alpha^{**})/q_n(\alpha^*)$ та $q_n(\alpha^{***})/q_n(\alpha^*)$ прямують до одиниці при зростанні n . Так, наприклад, при $n=5$ $q_n(\alpha^{**})/q_n(\alpha^*)=1$ з точністю до четвертого знаку після коми, при $n=20$ – з точністю до сьомого знаку після коми.

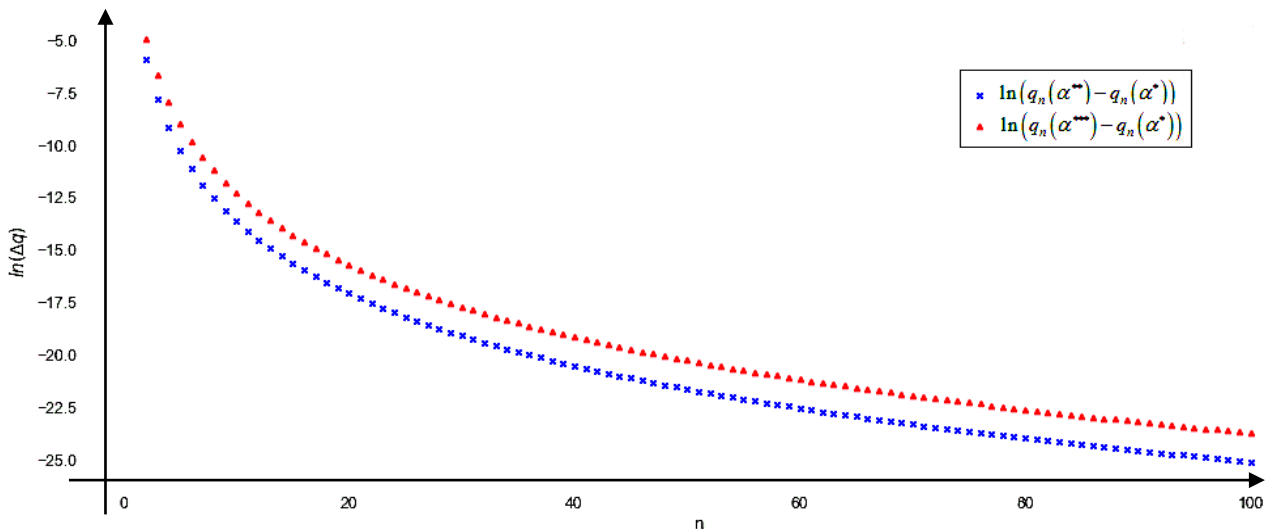


РИС. 5. Різниця об'ємів Δq наближених еліпсоїдів та мінімального еліпсоїда: логарифмічна шкала

ТАБЛИЦЯ 1. Коефіцієнти зменшення об'єму та їх порівняння: $n = 1 \div 20$

n	$q_n(\alpha^*)$	$q_n(\alpha^{**})$	$q_n(\alpha^{***})$	$q_n(\alpha^{**})/q_n(\alpha^*)$	$q_n(\alpha^{***})/q_n(\alpha^*)$
1	NaN	0.5857864	0.6180340	NaN	NaN
2	0.7698004	0.7725425	0.7768870	1.0035621	1.0092058
3	0.8437500	0.8441633	0.8450613	1.0004898	1.0015541
4	0.8813189	0.8814234	0.8816821	1.0001186	1.0004122
5	0.9042245	0.9042600	0.9043538	1.0000392	1.0001430
6	0.9196855	0.9197001	0.9197401	1.0000159	1.0000594
7	0.9308347	0.9308416	0.9308608	1.0000074	1.0000280
8	0.9392592	0.9392628	0.9392729	1.0000038	1.0000146
9	0.9458508	0.9458528	0.9458585	1.0000021	1.0000082
10	0.9511498	0.9511510	0.9511545	1.0000012	1.0000049
11	0.9555030	0.9555038	0.9555059	1.0000008	1.0000030
12	0.9591431	0.9591436	0.9591450	1.0000005	1.0000020
13	0.9622321	0.9622325	0.9622334	1.0000003	1.0000013
14	0.9648866	0.9648868	0.9648875	1.0000002	1.0000009
15	0.9671922	0.9671923	0.9671928	1.0000002	1.0000006
16	0.9692135	0.9692136	0.9692139	1.0000001	1.0000005
17	0.9710001	0.9710001	0.9710004	1.0000001	1.0000003
18	0.9725906	0.9725906	0.9725908	1.0000001	1.0000003
19	0.9740156	0.9740157	0.9740158	1.0000001	1.0000002
20	0.9752997	0.9752998	0.9752999	1.0000000	1.0000002

В табл. 2 наведено кількість ітерацій, які необхідно зробити як класичному методу еліпсоїдів, так і обом наближеним методам еліпсоїдів, щоб для $n = 1 \div 30$ гарантувати зменшення об'єму рівне 10^{-10n} . Тут K_1, K_2, K_3 – найменші цілі числа, при яких $(q_n(\alpha^*))^{K_1} \leq 10^{-10n}$, $(q_n(\alpha^{**}))^{K_2} \leq 10^{-10n}$, $(q_n(\alpha^{***}))^{K_3} \leq 10^{-10n}$. Вони визначаються за формулами

$$K_1 = \left\lceil \frac{-10n \ln 10}{\ln q_n(\alpha^*)} \right\rceil; \quad K_2 = \left\lceil \frac{-10n \ln 10}{\ln q_n(\alpha^{**})} \right\rceil; \quad K_3 = \left\lceil \frac{-10n \ln 10}{\ln q_n(\alpha^{***})} \right\rceil.$$

Такі кількості ітерацій забезпечують розв'язання задач з відносною точністю 10^{-10} за монотонним зменшенням об'єму області локалізації розв'язку тієї чи іншої задачі.

ТАБЛИЦЯ 2. Кількість ітерацій для розв'язання задач з відносною точністю 10^{-10} при $n = 1 \div 30$

n	K_1	K_2	K_3		n	K_1	K_2	K_3
1	NaN	44	48		16	11782	11782	11782
2	177	179	183		17	13302	13302	13302
3	407	408	411		18	14914	14914	14914
4	730	730	732		19	16617	16618	16618
5	1144	1144	1146		20	18414	18414	18414
6	1651	1651	1652		21	20302	20302	20302
7	2249	2250	2250		22	22282	22282	22282
8	2940	2940	2941		23	24354	24354	24354
9	3723	3723	3724		24	26519	26519	26519
10	4598	4598	4598		25	28775	28775	28775
11	5565	5565	5565		26	31124	31124	31124
12	6624	6624	6624		27	33565	33565	33565
13	7776	7776	7776		28	36097	36097	36097
14	9019	9019	9019		29	38722	38722	38722
15	10354	10355	10355		30	41439	41439	41439

З табл. 2 видно, що при всіх значеннях n кількість ітерацій для наближених методів еліпсоїдів практично така сама, що і кількість ітерацій для класичного методу еліпсоїдів. Жирним шрифтом виділено випадки, при яких кількість ітерацій для наближених методів еліпсоїдів відрізняється від кількості ітерацій для класичного методу еліпсоїдів.

Висновки. У роботі описано властивості трьох еліпсоїдів для апроксимації n -вимірної напівкулі, коефіцієнт зменшення об'єму яких залежить тільки від n – вимірності простору. Перший – це відомий еліпсоїд мінімального об'єму, який використовується в класичному методі еліпсоїдів Юдіна – Немировського – Шора. Він забезпечує мінімальний коефіцієнт зменшення об'єму та може бути використаний якщо $n \geq 2$. Якщо $n = 1$, то класичний метод еліпсоїдів замінює метод дихотомії, який забезпечує коефіцієнт зменшення об'єму (довжини відрізка) рівним $1/2 = 0.5$.

Інші два еліпсоїди наближені до еліпсоїда мінімального об'єму і при великих n гарантують близькі до мінімального коефіцієнти зменшення об'єму. Якщо $n = 1$, то перший наближений еліпсоїд забезпечує коефіцієнт зменшення довжини відрізка рівним $2 - \sqrt{2} \approx 0.5858$. Другий наближений еліпсоїд є новим і коефіцієнт зменшення об'єму для нього незначно більший за коефіцієнт для першого наближеного еліпсоїда. Якщо $n = 1$, то він забезпечує коефіцієнт зменшення довжини відрізка рівним $(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.6180$.

Для трьох еліпсоїдів наведено порівняльні результати за коефіцієнтами зменшення об'єму, та кількістю ітерацій для розв'язання задач з відносною точністю 10^{-10} .

Робота підтримана грантом Volkswagen Foundation (грант № 97775).

Список літератури

1. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. думка, 1979. 200 с.
2. Стецюк П.І., Фішер А., Хом'як О.М. Уніфіковане представлення класичного методу еліпсоїдів. *Кибернетика та системний аналіз*. 2023. Т. 59, № 5. С. 113–123.
3. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач. *Экономика и математические методы*. 1976. Вып. 2. С. 357–369.
4. Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования. *Кибернетика*. 1977. № 1. С. 94–95.
5. Стецюк П.І. Приближенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 2003. № 3. С. 141–146.
6. Стецюк П.І., Фесюк А.В., Хомяк О.Н. Обобщенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 4. С. 70–80.
7. Stetsyuk P., Fischer A., Khomyak O. The generalized ellipsoid method and its implementation. In: Jacimovic M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. Optimization and Applications, OPTIMA 2019. *Communications in Computer and Information Science*. Springer, Cham. 2020. Vol. 1145. P. 355–370.
8. Grötschel M., Lovász L., Schrijver A. Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 362 p.
9. Nemirovsky A.S., Yudin D.B. Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization. New York: John Wiley, 1983.

Одержано 03.09.2024

Хом'як Ольга Миколаївна,кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.<https://orcid.org/0000-0002-5384-9070>khomiak.olha@gmail.com

УДК 519.85

О.М. Хом'як**Три еліпсоїди для зовнішньої апроксимації напівкулі***Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ*Листування: khomiak.olha@gmail.com

Вступ. Еліпсоїди, які апроксимують напівкулю в \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) і їх об'єм є меншим, ніж об'єм кулі, можуть бути використані для побудови алгоритмів розв'язання задачі мінімізації опуклої (гладкої або негладкої) функції, задачі мінімізації опуклої функції на кулі, загальної задачі опуклого програмування, задачі про сідлову точку опукло-увігнутих функцій та інших. Швидкість збіжності таких алгоритмів буде визначатися відношенням об'єму апроксимуючого еліпсоїда до об'єму кулі.

Мета роботи – описати властивості трьох еліпсоїдів для апроксимації n -вимірної напівкулі, коефіцієнт зменшення об'єму яких залежить тільки від n – вимірності простору. Перший – це відомий еліпсоїд мінімального об'єму, який використовується у класичному методі еліпсоїдів Юдіна – Немировського – Шора. Він забезпечує мінімальний коефіцієнт зменшення об'єму та може бути використаний якщо $n \geq 2$. Якщо $n = 1$, то класичний метод еліпсоїдів замінює метод дихотомії. Два інших еліпсоїди є наближеними до еліпсоїда мінімального об'єму і при великих n гарантують близькі до мінімального коефіцієнти зменшення об'єму.

Результати. Показано, що при $n = 1$ перший наближений еліпсоїд забезпечує коефіцієнт зменшення довжини відрізка рівним $2 - \sqrt{2} \approx 0.5858$. Другий наближений еліпсоїд є новим і коефіцієнт зменшення об'єму для нього незначно більший за коефіцієнт для першого наближеного еліпсоїда. Якщо $n = 1$, то він забезпечує коефіцієнт зменшення довжини відрізка рівним $(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.6180$. Для трьох еліпсоїдів

наведено порівняльні результати за коефіцієнтами зменшення об'єму ($n = 1 \div 20$), та кількістю ітерацій для розв'язання задач з відносною точністю 10^{-10} ($n = 1 \div 30$).

Висновки. Побудовано новий еліпсоїд для апроксимації n -вимірної напівкулі, який за об'ємом близький до мінімального еліпсоїда. Коефіцієнт зменшення об'єму запропонованого еліпсоїда апроксимується асимптотичною формулою $1 - 1/(2n) + 1/n^2$, що мало відрізняється від формули $1 - 1/(2n)$ для еліпсоїда мінімального об'єму.

Ключові слова: куля, еліпсоїд, розтяг простору, метод еліпсоїдів, метод дихотомії.

UDC 519.85

Olha Khomiak

Three Ellipsoids for External Approximation of the Half-Ball

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv

Correspondence: khomiak.olha@gmail.com

Introduction. Ellipsoids that approximate the half-ball in \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) and their volume is smaller than the volume of the ball can be used to construct algorithms for solving the problem of minimization of a convex (smooth or non-smooth) function, the problem of minimization of a convex function on a sphere, a general problem convex programming, saddle point problems of convex-concave functions and others. The speed of convergence of such algorithms will be determined by the ratio of the volume of the approximating ellipsoid to the volume of the ball.

The purpose of the work is to describe properties of three ellipsoids for approximation of a n -dimensional half-ball, the volume reduction factor of which depends only on n – dimension of space. The first is the well-known ellipsoid of minimum volume, which is used in the classical Yudin-Nemirovsky-Shor ellipsoid method. It provides a minimum volume reduction factor and can be used if $n \geq 2$. If $n = 1$, then the classical ellipsoid method replaces the dichotomy method. The other two ellipsoids are close to the minimum volume ellipsoid and at large n guarantee volume reduction coefficients close to the minimum.

The results. It is shown that when $n = 1$ the first approximate ellipsoid provides a coefficient of reduction of the segment length equal to $2 - \sqrt{2} \approx 0.5858$. The second approximate ellipsoid is new and the volume reduction factor for it is slightly larger than the factor for the first approximate ellipsoid. If $n = 1$, then it provides a coefficient of reduction of the segment length equal to $(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.6180$. For three ellipsoids, comparative results are given in terms of volume reduction coefficients ($n = 1 \div 20$) and the number of iterations for solving problems with relative accuracy 10^{-10} ($n = 1 \div 30$).

Conclusions. A new ellipsoid has been constructed to approximate the n -dimensional half-ball, which is close in volume to the minimal ellipsoid. The volume reduction factor of the proposed ellipsoid is approximated by an asymptotic formula $1 - 1/(2n) + 1/n^2$, which differs little from the formula $1 - 1/(2n)$ for an ellipsoid of minimum volume.

Keywords: ball, ellipsoid, space dilation, ellipsoid method, dichotomy method.