КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.85
DOI:10.34229/2707-451X.25.2.2

В.І. ПЕТРЕНЮК, Д.А. ПЕТРЕНЮК

ПРО СИНТЕЗ ПЛОЩИННИХ ГРАФІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Побудова скінчених площинних графів із заданої множини графів G_i з підмножинами M_i множини їх точок, які мають задану кліткову довжину і фіксоване число досяжності, та є мінімальними відносно заданої довжини кліткової відстані при операціях видалення ребра чи точки заданої множини точок графа, де точка це вершина чи внутрішня точка ребра.

Ключові слова: *φ-перетворення графів, неорієнтована поверхня, площинний граф, арех-граф.*

Вступ. Основні визначення та позначення взяті з [1–3]. Розглянемо задачу дослідження властивостей площинних графів мінімальних щодо заданої множини вершин із фіксованими характеристиками – кліткова довжина, число досяжності заданої підмножини множини точок та оцінка неорієнтованого роду утворених з них графів. Будемо вважати, що, згідно [3], мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N має комбінаторне подання через множину граничних замкнутих шляхів, утворених при обході за годинниковою стрілкою ребер та вершин на границі кожної клітки з множини. Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N, яке реалізує число досяжності t, $t_G(M,N)=t$, тобто це найменша за включенням підмножина $\{s_i\}_{i=1}^{t}$ множини $S_G(N,f)$, де множина $S_G(N,f)=N \setminus f(G)$, складена з кліток, на границях яких розташовано точки з множини M. Кожний граф G роду k, $k \geq 1$, може бути поданим таким перетворенням: $\phi(H+St_n(g_0), \sum_{i=s}^{m}(a_i \dot{+} g_i)) \to (G, \{a_i^*\}_{i=1}^{m})$, як φ-образ графа H та зірки $St_n(g_0)$, приєднаної висячими вершинами g_i до точок a_i, $M=\{a_i\}_{i=1}^{m}$, $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$, яка розміщується мінімальним вкладенням f', $f': H \to N'$ на границях кліток $s_1, s_2, \ldots s_t$ множини $N' \setminus f'(H)$, де $t \geq 2$, $m \geq 2$, $i=1,2,\ldots,m$. В роботі [4] визначено (по аналогії з характеристиками вкладення графа до орієнтованої поверхні) на підмножині $\{s_i, s_j, s_k\}$ множини $S_G(N,f)$ характеристику θ, $\theta=1$, множини M при виконанні умови $\partial s_i \cap \partial s_j \cap \partial s_k \neq \varnothing$, тобто якщо є хоча б одна спільна точка на їхніх границях, яка є центром кліткової зірки, утвореної із трьох кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$, або визначено характеристику $\partial\theta$, $\partial\theta=1$, якщо пари границь цих кліток мають хоча б одну спільну точку, тобто – простий цикл з кліток $\{s_i, s_j, s_k\}$.

Стаття має вступ та частину 1, в яких досліджено структурні властивості площинних графів G із заданою підмножиною M множини його точок з певним числом досяжності та фіксованою довжиною кліткової відстані. Їх використано при оцінці неорієнтованого роду простих графів, поданих як φ-образ одного з графів G та простої зірки або квазізірки шляхом ототожнення пар точок множини M з висячими вершинами однієї з цих зірок. Основний результат міститься в теоремах 1 та 2.

Позначення 1. Позначатимемо $\angle(s_i, s_j)$ та називатимемо кутом між клітками чи псевдоклітками s_i, s_j множини $S_G(N, f)$ найменшу за включенням зірку графа G з центром в a, $a \in G^0 \cap (\partial s_i \cap \partial s_j)$, із множиною ребер-променів, розташованих з одного боку відносно точки перетину границь кліток s_i, s_j. Ці ребра або їхні частини вкладатимемо до стрічки Мебіуса, приклеєної до площини, для утворення псевдоклітки, на границі якої розміщуються об'єднання границь s_i, s_j.

Позначення 2. Нехай задане мінімальне вкладення f графа H в неорієнтовану поверхню N. Будемо позначати $\alpha(\angle(s_1, s_2))$ – операцію перетворення ребер e_1, e_2, $f(e_1) \subset \partial s_1$, $f(e_2) \subset \partial s_2$, зі спільною вершиною a кліток s_1, s_{12}, s_2, де $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$, причому $f(M) \subset \partial s_1 \cup \partial s_2$, де $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Приклеїмо до клітки s_{12} стрічку Мебіуса таким чином: розщепимо довільну внутрішню точку $f(x_i)$ ребра e_i, $e_i = (a_i, b_i)$ на точки x_i', x_i'', де $i = 1, 2$. Виріжемо у середині s_{12} елементарний диск з центром у x_i та розташуємо на його границі діаметрально протилежні пари точок (x_1', x_2''), (x_1'', x_2') як кінцеві точки частин схрещених ребер на площині елементарного диска. Отримаємо таким чином псевдоклітку s неорієнтованої поверхні N', де $\gamma(N') = \gamma(N) + 1$, $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$, в яку можливо вкласти вкладенням f' графа G у поверхню N', ту частину зірки $f'(St_n(g_0))$, яка приклеєна до точок множини $f(M) \cap \partial s$, і таким чином отримаємо нове вкладення.

Позначення 3. Під квазізіркою $St_G(H)$ з центром H розумітимемо підграф чи частину H графа G з множиною висячих ребер, прикріплених однією кінцевою точкою до вершини чи точки ребра підграф H, а інші кінцеві точки належать множині приєднання M, $M = \{a_i\}_{i=1}^m$.

Нехай задано мінімальне вкладення f графа G до евклідової площини Σ_0, яке реалізує число досяжності t, $t_G(M, N) = t$, $t \geq 2$, та задана множина з n кліток, на границях яких розташована задана множина точок M графа G, де $n \geq t \geq 2$.

Визначення 1. Будемо називати кліткововою відстанню $L_G(s_i, s_j, f)$ довжини $d_G(s_i, s_j, f)$, де $d_G(s_i, s_j, f) = k$, $k > 0$, між границями кліток s_i, s_j із заданими на них підмножинами L_i, L_j вершин зв'язного графа G, де $L_i \subseteq G^0 \cap \partial s_i$, $L_j \subseteq G^0 \cap \partial s_j$, $\{s_i, s_{i+1}, ..., s_{i+k}, s_j\} \subset \sum_0 \setminus f(G)$, найменшу за включенням впорядковану (пронумеровану за зростанням) множину кліток J, $J = \{s_i, s_{i+1}, ..., s_{i+k}, s_j\}$, якщо послідовні пари кліток мають на своїх границях щонайменше одну спільну вершину графа G.

При $k = 0$ підмножину множини J, складену із, щонайменше, двох послідовних кліток з хоча б однією спільною вершиною на границях, будемо рахувати як одну клітку та будемо говорити, що на множині J задано простий вироджений кліткoвий ланцюг L_{ij}, $L_{ij} = L(s_i, s_j)$, довжини 1.

Якщо множина *M* розташована на границях кліток з множини $\{s_i\}_{i=1}^n$, де $n \ge t > 2$, та має клітку s_1, яка належить до підмножини рівновіддалених від інших кліток s_i, то кліткововою зіркою чи деревом з центром у клітці s_1 будемо називати найменше за включенням об'єднання всіх пронумерованих за зростанням кліток з кліткових ланцюгів $\bigcup_{2\le i\le n} L_G(s_1, s_i, f)$ довжиною $d_G(s_1, s_i, f)$, $d_G(s_1, s_i, f) = i-1,\ i > 0$, для всіх пар кліток (s_1, s_j), а довжиною кліткової відстані такої зірки називатимемо $\min \sum_{i=1}^{n} d_G(s_1, s_i, f)$, обчислену для кожної центральної клітки s_1. Множину $\bigcup_{2\le j\le n} L_G(s_1, s_i, f)$ або множину J, якщо $t = n = 2$, називатимемо клітковим покриттям множини *M*.

Позначення 4. Процедура $Пс(вхід: \mathrm{T(M,G)}, вихід: N', N'')$ потрібна для продовження вкладення зв'язного площинного графа G в евклідову площину, яку перетворимо в неорієнтовану поверхню N' шляхом приєднання 2-ручок та хоча б однієї стрічки Мебіуса, та досяжності на N' заданої множини точок *M*, спочатку розташованої на границях найменшої за включенням множини кліток $\{s_j\}_{j=1}^k$, покритої клітковими ланцюгами з множини $T(M,G)$, $T(M,G) = \{L_G(s_0, s_j, f)\}_{j=1}^k$ з початком у центральній клітці s_0, яка може не належати до множини $\{s_j\}_{j=1}^k$.

Процедура $Пс(вхід: \mathrm{T(M,G)}, вихід: N')$ виписана далі у твердженні 5, обчислює також величину $\kappa_1 + 2\kappa_2$, де κ_i – число кліткових ланцюгів довжини i з початковою кліткою s_0, яку будемо називати скороченою кліткововою довжиною множини *M* та позначати $D_G(M)$, бо таким чином враховано число стрічок Мебіуса, без числа 2-ручок, потрібних для побудови вкладення площинного графа до неорієнтованої поверхні, на якій задана множина точок буде досяжною.

Зазначимо доцільність розгляду кліткової довжини за модулем 3, бо ця відстань стає несуттєвою з огляду на приєднання 2-ручки (збільшуючи неорієнтований рід на 2) до першої та останньої клітки ланцюга, у випадку парної довжини ланцюга з кліток множини J, чи передостанньої, у випадку непарної довжини ланцюга з кліток множини J. Результатом роботи процедури *Пс()* буде поверхня N' неорієнтованого роду $2\text{к} + \kappa_1 + 2\kappa_2$, де $k = \text{к} + \kappa_1 + \kappa_2$, на якій границі всіх кліток s_i, s_j вкладенням f', $f': G \to N'$, розташовуватимуться на границі однієї клітки. У випадку незв'язного графа G одна з кліток множини *J* буде не 2-кліткою і не псевдокліткою.

Визначення 2. Нехай для зв'язного площинного графа G задане мінімальному вкладенні f, яке на границях кліток підмножини $\{s_i\}_1^t$ реалізує число досяжності t, де $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ а на підмножині $\{s'_i\}_1^d$ реалізує кліткову відстань довжиною $d = D_G(M)$ множини точок M, де $\{s'_i\}_1^d \cup \{s_i\}_1^t$ – підмножина множини $\Sigma_0 \setminus f(G)$. Будемо називати подвійним покриттям множини точок M та позначати $TC_G(M,t)$, пару підмножин $(\{s_i\}_1^t, \{s'_i\}_1^d)$. Позначатимемо $C(M)$ підмножину $\{s'_i\}_1^d$, яка реалізує кліткову відстань довжини $d_G(M)$ та є найменшою за включенням множиною всіх кліток з кліткових ланцюгів $L(s_i, s_j)$, що з'єднують центральну клітку s_i з іншими клітками s_j для $j = 2,..,mi$, де $mi \ge t > 0$, та яка задовольняє умові $\{s_i\}_1^t \cap \{C(L_{ij})\}_{j=1}^{mi} = \varnothing$.

Визначення 3. Нехай процедурою *Пс()* для заданої множини точок M, $M=\{a_i\}_{i=1}^m$, площинного графа G з числом досяжності $t_G(M,\Sigma_0)$, де $t_G(M,\Sigma_0)=t$, $t\geq 2$, встановлено значення $D(M,t,f)=2\kappa+\kappa_1+2\kappa_2$ для кожного неізоморфного мінімального вкладення $f:G\rightarrow\Sigma_0$.

Будемо називати число $D_G(M,t)$ скороченою кліткою довжиною множини M між підмножинами L_i, L_j, які розташовані на границях кліток s_i, s_j, де $D_G(M,t)=\min\limits_{\forall f\in fGN}\kappa_1+2\kappa_2$, де $M=L_i\cup L_j$, $L_i\cap L_j=\varnothing$, $\{s_i,s_j\}\subset\Sigma_0\setminus f(G)$, де fGN – множина всіх неізоморфних вкладень графа G до Σ_0, що реалізують кліткову відстань довжиною $D_G(M)$ множини точок M.

Визначення 4. Будемо називати множину M, $M=\{a_i\}_{i=1}^m$, точок графа G з числом досяжності t, де $t_G(M,\Sigma_0)=t$, критичною відносно скороченої кліткової відстані довжиною $D_G(M)$ при операції видалення довільного елемента a_i, якщо має місце нерівність $D_G(M\setminus a_i)<D_G(M)$, чи відносно операції стискання ребра $u=(ab)$ в точку a' (якщо $\{a,b\}\subset M$, то замість M розглядатимемо множину $M'=(M\setminus(a,b))\cup\{a'\}$), якщо має місце нерівність $D_{Gu}(M')<D_G(M)$.

Визначення 5. Називатимемо граф G, із заданою множиною точок *M*, критичною щодо скороченої кліткової довжини $D_G(M)$ при операції видалення довільної точки множини, мінімальним відносно $D_G(M)$ при операції видалення або стискання у точку довільного ребра u, якщо $D_{G\setminus u}(M)+1=D_G(M)$ або $D_{Gu}(M')<D_G(M)$, де Gu – граф зі стиснутим у точку a' ребром $u=(a,b)$ та $M'=(M\setminus\{a,b\})\cup a'$.

Прикладом мінімального графа з клітковою відстанню 1 є графи K_4, де *M* – множина всіх вершин або $K_{2,3}$ з підмножиною вершин степені 2, відповідно, граф $K_{3,3}\setminus(a,b)$ з множиною точок $M=\{a,b\}$, або 1-підрозділений граф K_4 з множиною *M*, складеною з усіх вершин степені 2, який має кліткову відстань 2.

Зазначимо наступне.

1. В подальшому, якщо мова йтиме про рід графа-обструкції *Q*, як φ-образа площинного графа G та квазізірки при ототожненні пар точок множини M з висячими вершинами квазізірки, то розумітимемо під клітковою відстанню довжини *d* скорочену довжину кліткового ланцюга або дерева кліткового покриття заданої множини точок площинного графа.

2. При обчисленні кліткової відстані заданої множини *M* площинного графа G точок графа треба для кожного неізоморфного вкладення площинного графа G будувати розширення вкладення площинного графа *G* до вкладення в неорієнтовану поверхню N' – евклідову площину з, щонайменше, однією стрічкою Мебіуса, на якій множина точок *M* досяжна.

3. Необхідною умовою досяжності буде кліткова відстань довжиною 1 або 2 між парою кліток, одна з яких – це центр s_1, із заданими підмножинами точок графа. Достатньою умовою досяжності буде приклеювання до евклідової площини 2-ручок з, щонайменше, однією стрічкою Мебіуса.

В багатьох статтях досліджувалися структурні властивості графів-обструкцій заданої неорієнтованої поверхні, як неорієнтованого 2-многовиду без країв, та побудовані їхні прототипи як основу, з якої, шляхом видалення чи стискання деякої множини ребер та, можливо, додавання нових ребер без зміни роду, утворюються графи-обструкцій заданої поверхні. Так дослідження структури графів неорієнтованого роду виконувалися в [4–6]. Подібні питання розглядалися в [7–9]. В роботах [10, 11] досліджено структурні властивості графів як φ-образа площинного графа або простої зірки, або графа-обструкції проективної площини. В роботах [12, 13] розглянуто apex-графи, в [14] наведено подібні метричні властивості графів, у [15, 16] побудовані всі 2-зв’язні мінори поверхні Клейна.

Частина 1

Частина розв'язку нашої задачі це побудова неізоморфних мінімальних площинних графів G із заданою множиною точок M з кліткововою досяжністю D, які є критичними щодо кліткової довжини. З графів із заданої множини (частково зі списку на рис. 2) будуємо множину $L(D)$ графів G на основі яких можливо побудувати прототипи графів-обструкцій Q, так звані apex-графи обмеженого неорієнтованого роду $\gamma(Q)$, шляхом φ-перетворення графа G та простої зірки при ототожненні різних пар точок, складених з точок заданої множини M та висячих вершин зірки або квазізірки, в окремі вершини φ-образа – графа Q.

*Лема 1***.** Нехай для зв'язного площинного графа G задане розбиття множини M на непусті підмножини та визначено кліткове дерево $T_G(M)$, в якому вершинами будуть підмножини розбиття множини точок M на непересічні непусті підмножини, розташовані на границях кліток мінімального неорієнтованого вкладення $f: G \to \Sigma_0$, а ребрами буде наявність спільної точки для границь сусідніх кліток множини M. Мають місце такі твердження:

1. Кліткова відстань $d_G(M)$, $f(M) \subset \partial s_i \cap \partial s_j$, між заданою парою кліток мінімального неорієнтованого вкладення $f: G \to \Sigma_0$, задовольняє нерівності $d_G(M) \le \rho(M_i, M_j) + 1$, де $\rho(M_i, M_j)$ – найменша метрична відстань між парами довільних точок підмножин M_i, M_j множини $M = \bigcup_{i=1}^{k} M_i$, де $M_i \subset \partial s_i$, $i \ne j, i, j = 1, 2, ..., |\Sigma_0 \setminus f(G)|$.

2. Якщо множина M розміщена на границях більш ніж двох кліток, то кліткова відстань між її підмножинами не більше ніж на 1 відрізняється від суми довжин найкоротших простих ланцюгів між парами відповідних їм вершин дерева $T(M)$.

3. Якщо для множини точок M $(t_G(M) = 3) \wedge (\theta_G(M) = 1)$, то $d_G(M) = 2$, а якщо має місце співвідношення: $(t_G(M) > 3) \wedge (\theta_G(M) = \lfloor (t_G(M) - 1)/2 \rfloor)$, то $d_G(M) = \theta_G(M) + 1$.

4. Кожен граф-обструкція неорієнтованої поверхні має ребра покриті підграфами гомеоморфними K_4 чи $K_{2,3}$.

5. З двох копій графів $K_{2,3}$ чи K_4 складаються три 1-зв'язні площинні графи мінімальні відносно кліткової довжини 2 множини точок без спільної вершини, та ще два 1-зв'язні площинні графи є мінімальними відносно кліткової довжини 3 множини всіх вершини.

Доведення. Твердження 1, 2, 3 леми 1 випливатимуть з вищенаведених визначень 3, 4, 5.

Доведення твердження 4. Оскільки кожне ребро графа-обструкції неорієнтованого роду графа G на евклідовій площині перетинається у внутрішній точці з, щонайменше, одним ребром і розміщується певним мінімальним вкладенням на стрічці Мебіуса неорієнтованої поверхні разом із хоча б одним ребром, то тоді довільне ребро – це ребро підграфа, гомеоморфного K_4, який у свою чергу є підграфом або частиною підграфа, гомеоморфного графу Куратовського. З іншого боку, обидва графи Куратовського мають реберне покриття парою чи трійкою підграфів гомеоморфних K_4. Таким чином граф-обструкція G матиме реберне покриття скінченою множиною з графів або частин гомеоморфних K_4.

На 6-й і 7-й картах рис. 1 показано приклади склеювання по кінцевим вершинам пари квазізірок з центрами-графами K_4, склеєними парами виду (точка графа K_4, висяча вершина), два паралельні ребра центрів розташовані на двох стрічках Мебіуса, на яких лежать схрещені висячі ребра квазізірок. На 8-й та 9-й картах приклади до твердження 3 леми 1. На 8-й карті цього ж рисунку показано реберне покриття $K_{3,3}$ двома частинними підграфами гомеоморфними графу K_4, один без наведеного ребра, а другий отримано видаленням одного з трьох несуміжних ребер, окрім показаного ребра. На 9-й карті даного рисунку показано реберне покриття K_5 трьома підграфами гомеоморфними графу K_4, один без чотирьох ребер з спільною вершиною v, із них два виділених ребра. З іншого боку це квазізірка з центром K_4 або $K_{2,3}$, з кожної вершини якого виходить промінь-ребро, висячі вершини яких мають вершини на простому циклі.

Доведення леми 1 закінчено.

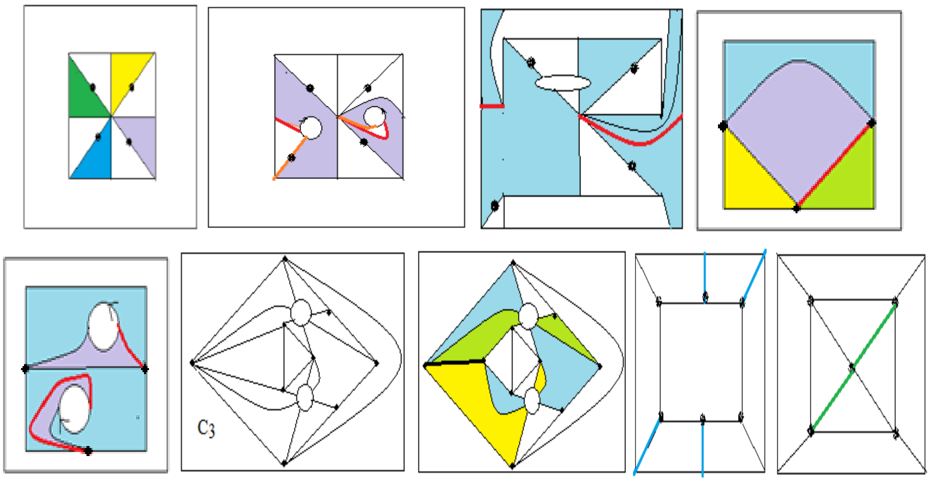

РИС. 1. На перших 3-х картах показано приєднання 2-ручки та стрічки Мебіуса до евклідової площини, що призведе до вкладення графа H у поверхню Клейна з множиною M з чотирьох показаних вершин із числом досяжності 4 і тета характеристикою $\theta_H(M,\Sigma_0)=1$. На 4-й та 5-й картах показано приєднання 2-ручки до евклідової площини з множиною з трьох заданих вершин (показаних жирним) із числом досяжності 3 і характеристикою $\partial\theta_H(M)=1$

Лема 2. Мають місце такі співвідношення:

1. Наступні графи є мінімальними відносно кліткової відстані 1:

– $K_{2,3}$ із множиною трьох вершин степені 2;

– K_4 із виділеною парою точок несуміжних ребер;

– $K_5 \setminus e$ з множиною вершин видаленого ребра;

– K_4 з множиною всіх вершин.

2. Графи $G_i(M)$ – φ-образи пари графів зі співвідношення 1 є мінімальними відносно кліткової відстані 2, де $i=1,2,3,...,10$, показані на перших десяти картах рис. 2, як площинні підграфи графів-обструкцій проективної площини B_7, C_3, C_4, D_3, D_2, $K_{1,2,2,2}$, E_{22} або $K_7 \setminus C_4^1$, E_2, B_3, C_7 разом із виділеними жирним вершинами своєї множини M.

3. Для заданої множини M точок, розташованої одним і тим вкладенням як на границях кліток множини M', що реалізують кліткову відстань $d_G(M)$, так і на границях кліток множини M'', на яких реалізовано число досяжності $t_G(M)$, може виконуватися співвідношення $M' \cap M'' = \varnothing$.

4. Графи $G'_j(M)$ з числа графів $E_{19}\setminus 1$, D_2, E_{27}, G_1, E_5, $F_1\setminus 1$, $F_1\setminus 2$, C_4, D_{12}, $C_7\setminus 1$, $C_7\setminus 2$, $F_6\setminus 1$, показаних на рис. 3, є мінімальними відносно кліткової довжини 2 заданих множин, складених

з показаних точок та є φ-образами пари графів K_4 та $K_{2,3}$ при ототожненні точок відповідних пар простих ланцюгів, у результаті якого утворюється простий ланцюг, чи ототожненні простих циклів, у результаті якого утворюється простий цикл графа G_j, $j = 1, 2, \ldots, 12$.

Доведення леми 2 має конструктивний характер, який випливає з рис. 2 та 3.

Граф G_1 – φ-образ графа K_4 (з двома парами виділених точок на двох 1-підрозділених суміжних ребрах) та зірки $St_4(v)$ при попарному ототожнені однієї пари висячих вершини зірки з точками 1-підрозділення пари суміжних ребер e_1, e_2 графа K_4, а другої пари з кінцевими вершинами ребра суміжного з e_1, e_2.

Граф G_2 – φ-образ графа K_4 (з трьома виділеними точками 1- та 2-підрозділення суміжних ребер e_1, e_2) та зірки $St_3(v)$ при попарному ототожненні двох висячих вершини зірки з точками 1-підрозділення ребер e_1, e_2 та кінцевою вершиною ребра e_3, суміжного з ребрами e_1, e_2 графа K_4.

Граф G_3 – φ-образ пари графів $(K_4, K_{2,3})$ з ототожненою парою ланцюгів довжини 2.

Граф G_4 – φ-образ пари графів $(K_4, K_{2,3})$ з ототожненою парою циклів (z_1, z_2), де z_1 має довжину 3, з двома суміжними 2-підрозділеними ребрами, z_2 довжини 4.

Граф G_5 – φ-образ пари графів K_5 з видаленою парою несуміжних ребер e_i при ототожненні пари циклів, розташованих на кінцевих вершинах видалених ребер.

Граф G_6 – φ-образ пари графів K_4 при ототожненні точок пари ребер.

Граф G_7 – φ-образ пари графів K_4 з 1-підрозділеними ребрами циклу довжини 3 при ототожненні точок циклів довжини 4 та частин ребер, суміжних ребрам цих циклів.

Граф G_8 – граф K_4 з усіма 1-підрозділеними ребрами.

Граф G_9 – φ-образ пари графів K_4 при ототожненні пари вершин.

Граф G_{10} – φ-образ пари графів $K_{2,3}$ при ототожненні пари вершин.

Граф G_{11} – φ-образ пари графів K_4 при ототожненні точок пари (ребро, частина ребра), який має несуттєве ребро відносно кліткової довжини 2 множини показаних вершин.

Що стосується співвідношення 3, то на 2-й та 3-й картах третього ряду рис. 2, де показано жирним вершини графа складають задану множину M точок і блакитним виділено множину M'' з трьох кліток, що реалізує число досяжності $t_G(M) = 3$, а жовтим позначено множину M' з чотирьох кліток, на яких реалізована кліткова відстань $d_G(M) = 3$, видно, що множини $M' \cap M'' = \varnothing$. На 4-й і 5-й картах цього ж рисунку показано (чорним) вершини графа, що складають критичну множину M відносно кліткової відстані 3.

На перших 8-ми картах рис. 2 показані площинні 2-зв’язні підграфи графів-обструкцій проективної площини: B_7, C_3, C_4, D_3, D_2, $K_{1,2,2,2}$, E_{22} або $K_7 \setminus C_4^1$, E_2, B_3, C_7, D_2 з 9-ї по 11-ту 1-зв’язні підграфи графів-обструкцій проективної площини із виділеними жирним вершинами із множин M з кліткою відстанню 2. Після приєднання до них висячих вершини простої зірки отримаємо вищезгадані графи. На 8-ій карті граф K_4 із 1-підрозділеними ребрами, як підграф графа E_2, має множину M з точок 1-підрозділення ребер, де $(t_G(M) = 3) \wedge (\theta_G(M) = 1)$. Два наступні, зліва-направо, графи мають кліткову відстань 1 та перший має зайве ребро.

Два крайні графи – підграфи графів-обструкцій проективної площини: C_2, D_1 з виділеними жирним вершинами із множин М з кліткою відстанню 2, де $(t_G(M) = 3) \wedge (\theta_G(M) = 1)$.

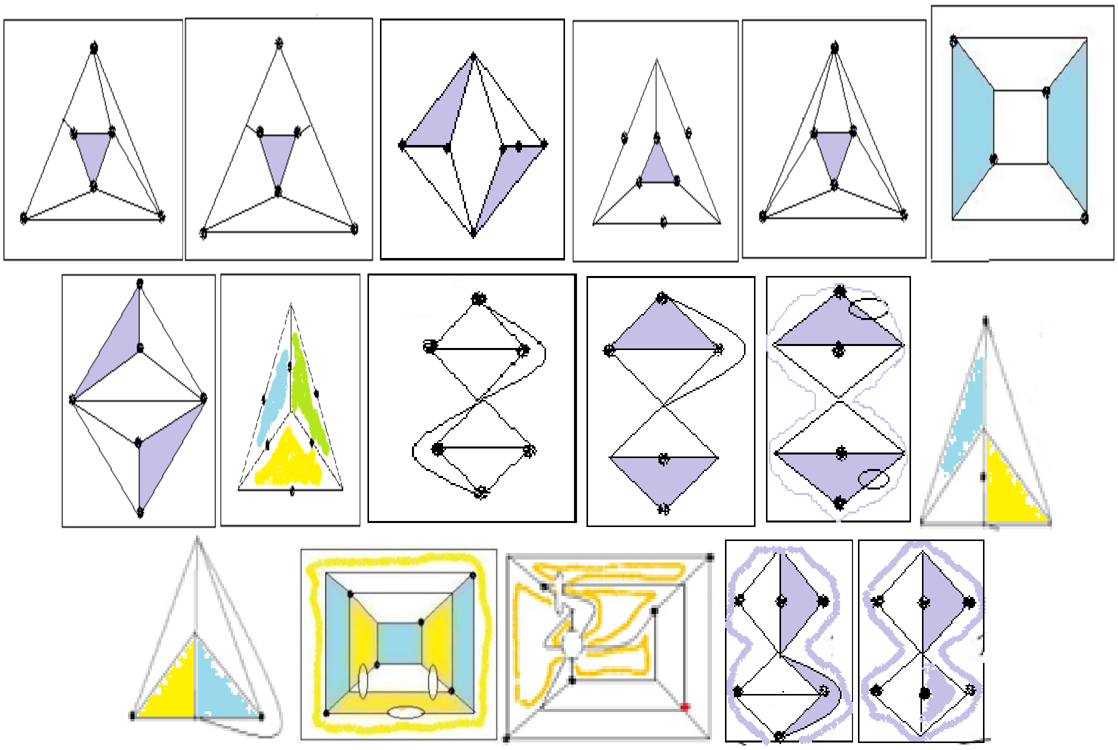

РИС. 2. На перших 8-ми картах показані площинні 2-зв'язні підграфи графів-обструкцій проективної площини: B_7, C_3, C_4, D_3, D_2, $K_{1,2,2,2}$, E_{22} або $K_7 \setminus C_4^1$, E_2, B_3, C_7, D_2. На 9-й, 10-й та 11-й картах наведені 1-зв'язні підграфи графів-обструкцій проективної площини із виділеними жирним вершинами із множин M з клітковою відстанню 2

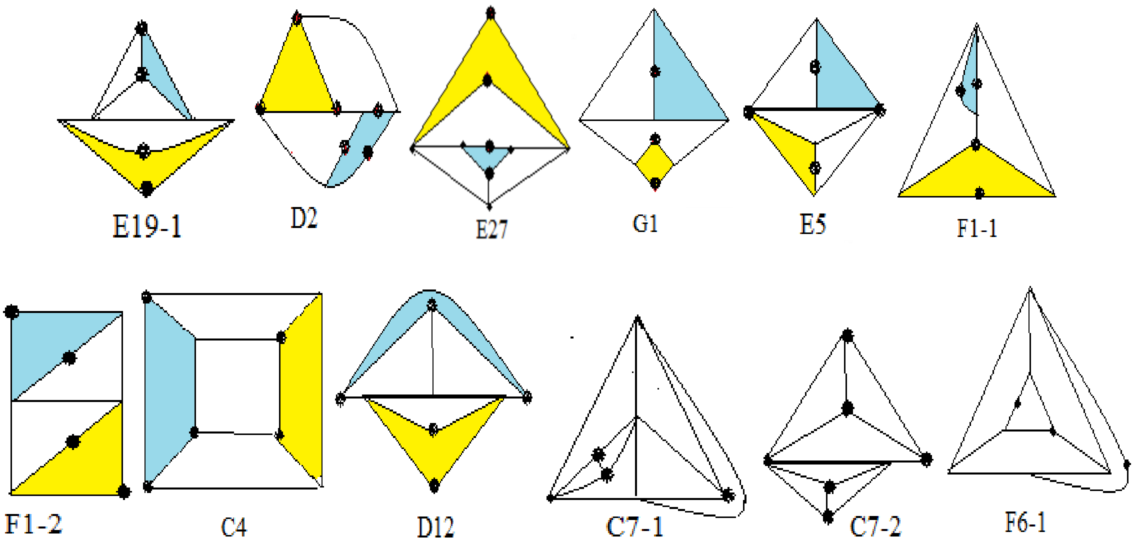

РИС. 3. Графи мінімальні відносно кліткової довжини 1 заданих множин з наведених точок

Лема 3. Нехай G – зв'язний площинний граф, мінімальний відносно числа $d_G(M)$ – кліткової відстані довжини, $d_G(M)=d$, підмножини точок M при операціях видалення ребра чи стягування його у точку та при видаленні з M довільної точки. Тоді мають місце наступні співвідношення:

– Якщо $t_G(M)=2$, $d_G(M)=1$, то G гомеоморфний одному з наступних графів: $K_{2,3}$ із множиною M з трьох вершин степені 2; K_4 із множиною M, складеною з пари точок несуміжних ребер; $K_5 \setminus e$ з множиною M, складеною з кінцевих вершин видаленого ребра; K_4 та множиною M всіх його вершин;

– Якщо $t_G(M)=3$, $d_G(M)=2$, то G гомеоморфний одному з 15-ти наступних графів: $C_2 \setminus 1$, $D_9 \setminus 1$, $D_9 \setminus 2$, $D_9 \setminus 3$, $E_{27} \setminus 1$, $F_6 \setminus 2$, $E_2 \setminus 1$, $E_{11} \setminus 1$, $E_{11} \setminus 2$, $E_3 \setminus 1$, $E_5 \setminus 1$, $D_2 \setminus 1$, $D_{12} \setminus 1$, $C_3 \setminus 1$, $C_4 \setminus 1$.

Доведення. Доведемо співвідношення 1. Нехай 2-зв'язний граф G – мінімальний площинний граф відносно $t_G(M)=2$ – числа досяжності мінімальної множини точок M. Тоді згідно [12] граф G – мінімальний відносно числа досяжності 2 та ізоморфний одному з графів на рис. 4. Графи на 1, 2, 4 та 5 картах рис. 4 мають вкладення графа в площину, що реалізує число досяжності 2 і кліткову відстань 1 для множини показаних жирним вершин. В третьому графі є підграф ізоморфний другому графу, а в шостому графі можливо стягнути ребро та отримати третій граф, рахуючи зліва направо.

Доведемо співвідношення 2 конструктивним шляхом за допомогою рис. 4 та 5, де показано мінімальні площинні графи з кліткової відстанню 2 множини виділених точок та числом досяжності 2 та 3, відповідно. Зазначимо, що характеристику $\theta_G(M)=1$ мають всі графи, окрім $E_2 \setminus 1$ і $D_9 \setminus 3$, які мають $\partial\theta_G(M)=1$.

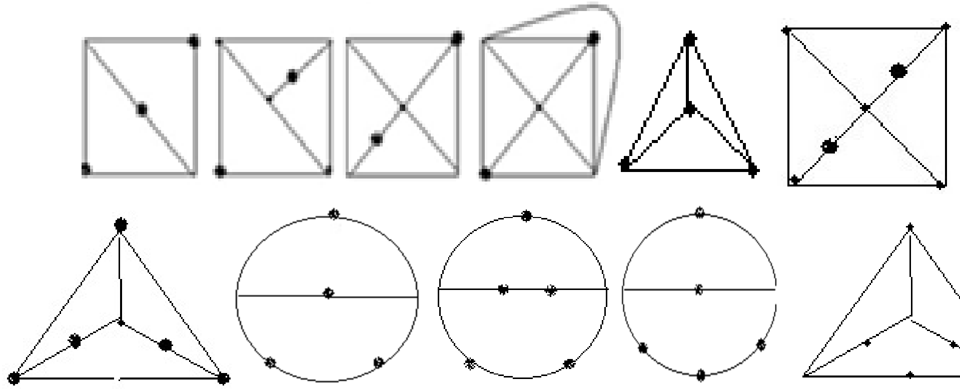

РИС. 4. Перші шість графів у першому ряду – це мінімальні графи з множиною показаних жирним точок підмножини M з кліткової відстанню довжини 1 та числом досяжності 2, а всі інші – приклади не мінімальних

Теорема 1. Нехай G – зв'язний площинний граф, мінімальний відносно числа $d_G(M)$ – кліткової відстані довжини, $d_G(M)=d$, $t_G(M)=t$, $t \geq 2$, $d \geq 1$, – підмножини точок M при операціях видалення ребра чи стягування його у точку, а також при видаленні з M довільної точки. Тоді мають місце наступні співвідношення:

1. Якщо граф $G \approx K_4^*$, де K_4^* – 1-підрозділений граф K_4, то подаватимемо його як φ-образ графів K_4 та $K_{2,3}$, ототожнених по точках двох циклів довжини 3 та спільним ребром.

2. Для площинного зв'язного графа G не гомеоморфного K_4^* та мінімального відносно кліткової відстані довжини $d_G(M)$ заданої множини точок M, де $d_G(M)=d$, $d \geq 1$, існує φ-перетворення

площинних графів H, H' на граф G визначене як $\phi_1 : (H + H', \sum_{i=1}^{n}(a_{0i} + a_{1i})) \to (G, \{a_i^*\}_{i=1}^{n})$ шляхом ототожнення кожної пари точок (a_{0i}, a_{1i}) на a_i^*, де $\{a_{0i}\}_{i=1}^{n}$, $\{a_{1i}\}_{i=1}^{n}$ множини точок простих циклів або ланцюгів $L_H, L_{H'}$, відповідно, тобто пара $(L_H, L_{H'})$ ототожнена в L. Граф H – мінімальний відносно кліткової відстані $d_H(\phi_1^{-1}(M) \cap H)$, де $d_H(M \cap H) = 1$, щодо видалення його ребра чи вершини, а граф H' матиме множину точок $\phi_1^{-1}(M) \cap H'$ з клітковою відстанню $d_{H'}(\phi_1^{-1}(M) \cap H')$ де, $d - 1 \le d_{H'}(\phi_1^{-1}(M) \cap H') \le d$, $t_{H'}(\phi_1^{-1}(M) \cap H') \le t - 1$ та може мати несуттєві ребра або вершини простого цикла, або ланцюга $L_{H'}$ щодо кліткової відстані $d_{H'}(\phi_1^{-1}(M) \cap H')$.

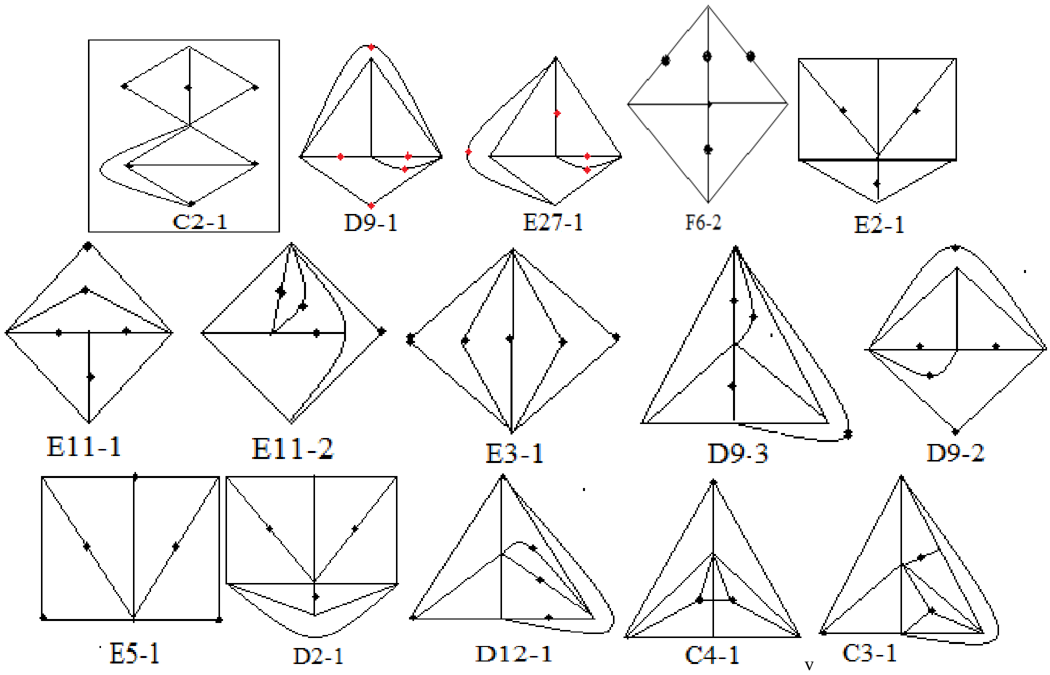

РИС. 5. Наведено графи з виділеними жирним вершинами із множин M з клітковою відстанню 2, де $(t_G(M) = 3) \wedge (\theta_G(M) = 1)$, мінімальні відносно кліткової довжини 2 показаних жирним точок множин

Доведення. Нехай $d_G(M) = 1$. Якщо граф $G \cong K_4^*$, де K_4^* – 1-підрозділений граф K_4, то подамо його як склейку графа K_4 та $K_{2,3}$ за двома циклами довжини 3 та спільним ребром. Тоді $2 \le t_G(M) \le 3$ та з поданих на рис. 4, 5 зв'язних графів, що є мінімальними відносно кліткової відстані 2, випливатиме твердження та задане вкладення $f : G \to \Sigma_0$ графа G у площину, яке реалізує $t_G(M)$ та $d_G(M) = 1$, якщо $t_G(M) = 2$. Тобто граф G не є зовнішньо планарним, бо містить підграф H гомеоморфний K_4, $K_5 \setminus e$ чи $K_{2,3}$. Множина M має розміщуватися на границях двох кліток без спільної точки або трьох кліток зі спільною точкою та належить 2-зв'язному підграфу H, гомеоморфному одному з показаних на рис. 4, 5, де елементи множини M наведені жирним точки графа. Для 1-підрозділеного графа K_4 з підмножиною M, складеною з усіх точок 1-підрозділення ребер, матимемо $t_G(M) = 3$ та $d_G(M) = 2$. Мінімальність множини M відносно довжини кліткової відстані означатиме, що при видаленні з множини довільного елемента v зменшується на 1 число d, бо кліткова відстань обраховуватиметься для $M \setminus v$. Виберемо зовнішню грань підграфа H одним з двох можливих варіантів: 1) з числа 2-кліток мінімального покриття множини M; 2) не з числа 2-кліток мінімального покриття множини M.

Варіант 1. Нехай зовнішня грань s_1 – перша 2-клітка мінімального покриття множини M, що належить підграфу H графа G. Якщо зовнішня грань s_1 – перша 2-клітка мінімального покриття множини M, то решта точок множини M, як і всі вершини не зовнішньо планарного графа, належатимуть границі хоча б однієї грані, тобто внутрішнім граничним циклам, що не належать зовнішньому граничному циклу. Тоді границі (граничного циклу) ∂s_1 зовнішньої грані s_1 належатиме простий ланцюг L, щонайменше, довжини 2, який не належить до підграфа $G \setminus (G^1 \cap \partial s_1)$. Згідно визначення кліткової відстані d, мають місце тільки два наступні підваріанти: випадок 1, коли є відділяюче s_1 кліткове кільце з тих граничних циклів, що не є клітками з покриття множини M, – тоді підграф $f(H)$ матиме спільний ланцюг L_0 з граничним циклом ∂s_1 зовнішньої грані, і випадок 2, коли є клітковий ланцюг *LК*, який розділятиме підграфи H' та H, де $H' = ((G^0 \setminus H^0) \cup (\partial s_1 \cap H^0)$, $(G^1 \setminus H^1) \cup (\partial s_1 \cap H^1))$ – кліткове кільце, складене з граничних циклів z_j, $j = 1,2,3,..,k$, що матимуть спільну точку з ∂s_1. Серед цих циклів z_j можуть бути кліткові цикли з мінімального покриття множини M, у яких граничні цикли матимуть із граничним циклом ∂s_1 тільки одну спільну точку (спільне ребро чи більше однієї спільної точки порушують умову мінімальності множини M, бо їх можливо стягнути у точку як несуттєві ребра чи вершини). Тоді підграф $f(H)$ матиме, можливо вироджений у точку, спільний ланцюг L_1 з об’єднання граничних циклів z_j. В обох випадках 1 та 2 підграф $f(H)$ матиме з $f(G \setminus H)$ спільний замкнутий ланцюг $L_0 \cup L_1$, тобто простий цикл, який у випадку виродженого ланцюга L_1 буде простим ланцюгом.

Шляхом подвоєння вершин та ребер побудуємо дві копії $L_H, L_{H'}$ замкнутого ланцюга $L_0 \cup L_1$ так, щоб L_H містила вершини циклу $L_0 \cup L_1$, інцидентні тільки вершинам підграфу H, а інша $L_{H'}$ містила вершини циклу $L_0 \cup L_1$, інцидентні тільки вершинам підграфу H'. В такий спосіб можливо подати граф G як φ-образ перетворенням φ_1 пари графів $(H \cup L_H, H' \cup L_{H'})$ на граф G, визначивши ототожнення по точках відповідних пар вершини копій L_H, $L_{H'}$ замкнутого простого ланцюга $L_0 \cup L_1$, які склеєно або простих ланцюгів, або по точках пари простих циклів підграфів H та H'.

Доведемо методом від протилежного, що підграф H' графа G – мінімальний відносно кліткової довжини $d_G(M')$, де $d_G(M') > d_G(M')$, множини M', $M' = M \cap (H' \cup L_{H'})$. Припустимо, що деяке ребро e графа $\phi_1(H' \cup L_{H'})$ – несуттєве відносно $d_G(M')$ при операціях видалення ребра чи стискання у точку, або є лишня точка v множини $\phi_1(M \cap H')$. Розглянемо φ-перетворення φ_2 пари графів $(H \cup L_H, H'')$ на граф G', де $H'' = \phi_1(H' \cup L_{H'}) \setminus e$, задане на тих же точках, що і перетворення φ_1. Якщо $e \in L_{H'}$ або $v \in L_{H'} \cap M$, то завдяки їхнім копіям в L_H ці видалені ребро або вершина належить до склеєного графа G' і множина точок $\phi_1(M \cap H'')$ буде розташована на тій же кількості граничних циклів або збільшиться на 1 завдяки зовнішній грані, яка містить $L_{H'}$. Тоді граф G' ізоморфний графу $G \setminus \phi_2(e)$ і множина точок $\phi_1(M)$ буде розташована на тій же кількості граничних циклів, тобто граф G – не мінімальний відносно $d_G(M)$, бо має несуттєве ребро $\phi_2(e)$. Отримано суперечність умові мінімальності відносно кліткової довжини множини *M*, тобто припущення неправильне. Таким чином, граф $H''=\phi_1(H'\cup L_{H'})$ не завжди мінімальний відносно кліткової відстані довжини $d_{H''}(M')$, де $d_G(M)-1\le d_{H''}(M\cap H'')\le d_G(M)$.

Аналогічним чином можливо довести мінімальність множини $M'=M\cap(H'\cup L_{H'})$ відносно кліткової відстані довжини $d_{H''}(M')$ при операції видалення довільної точки з M'.

Варіант 2. Нехай зовнішня грань s_1 не з числа 2-кліток мінімального покриття множини *M*. Замінимо зовнішню грань у покритті множини *M* на незовнішню, тоді матимуть місце наведені вище твердження для випадків 1 та 2 варіанту 1.

Доведення теореми 1 закінчено.

Наслідок 1. Зв'язний площинний граф *G* – мінімальний відносно $d_G(M)$ – кліткової відстані, $d_G(M)=d$, $t_G(M)=t$, $t\ge 2$, $d\ge 1$, підмножини точок *M* при операціях видалення ребра чи стягування його у точку, а також при видаленні з *M* довільної точки. Тоді граф *G* має, щонайбільше, *d* підграфів з підмножинами точок M_i, $M\subseteq\bigcup_{ш=1}^{d}M_i$ з кліткововою відстанню 1 та гомеоморфних наведеним у твердженні 1 леми 2 мінімальним графам відносно числа $d_G(M_i)=1$.

Теорема 2. Нехай зв'язний площинний граф *G* містить підмножину *M* множини точок з $t_G(M)\ge 2$, $\theta_G(M)\ge 0$ та кліткововою відстанню довжини $d_G(M)$. Маємо наступні співвідношення:

1. Нехай граф *Q* як φ-образ пари $(G,St_{|M|}(v))$, де *G* – мінімальний відносно кліткової відстані довжиною $d_G(M)$ множини *M*, де $3\ge d_G(M)\ge 1$, та простої зірки $St_{|M|}(v)$, при φ-перетворенні заданому шляхом ототожнення кожної пари точок $(u_1,u_2)\to u_{12}$, де $u_1\in M$, $u_2\in St^0_{|M|}(v)\setminus v$, у різні вершини u_{12} графа *Q*.

Тоді неорієнтований рід $\gamma(Q)$ задовольняє рівності $1\le\gamma(Q)\le d_G(M)$.

2. Нехай граф *G* подано як φ-образ однієї з наведених пар графів (G_i,G_j) при ототожненні пари досяжних на площині вершин чи простих незамкнутих невироджених ланцюгів або підланцюгів графів G_1,G_2, виписаних у лемах 2, 1, відповідно. Також у цих графах задано множини точок M_{G_i},M_{G_j}, які критичні відносно кліткової відстані $d_{G_i}(M_i),d_{G_j}(M_j)$, відповідно.

Тоді граф *G* містить підграф критичний відносно кліткової відстані $d_G(M)$, де $M=M_{G_i}\cup M_{G_j}$, та має місце подвійна нерівність $d_{G_i}(M_i)+d_{G_j}(M_j)-1\le d_G(M)\le d_{G_i}(M_i)+d_{G_j}(M_j)$, де $i=1$, 2, …, 11, $j=1$, 2, 3, 4.

3. Якщо граф *G* подано як φ-образ однієї з наведених пар графів (G_i,G_j) при ототожненні пари досяжних на площині простих циклів графів G_1,G_2, виписаних у лемах 2, 1, відповідно, та із заданими множинами точок M_{G_i},M_{G_j}, які критичні відносно кліткової відстані $d_{G_i}(M_i),d_{G_j}(M_j)$, відповідно, то граф *G* міститиме підграф критичний відносно кліткової відстані $d_G(M)$, де $M=M_{G_i}\cup M_{G_j}$, та має місце нерівність $d_G(M)\le d_{G_i}(M_i)+d_{G_j}(M_j)$, де $i=1,2,\ldots,11$, $j=1,2,3,4$.

4. Якщо ребро графа суттєве відносно кліткової відстані заданої множини точок, то при видаленні цього ребра кліткова відстань заданої множини точок зменшиться, щонайменше на 1, а число досяжності цієї множини може не змінитися.

5. Якщо задано φ-перетворення пари графа G з множиною точок M, яка має скорочену кліткову відстань довжини $D_G(M) = \kappa + 2\kappa_2 + \kappa_1$, та зірки $St_{|M|}(v)$, з множиною висячих вершин потужності $|M|$, шляхом ототожнення кожної пари виду (точки з M, висяча вершина зірки) на вершину графа Q, то маємо нерівність: $2\kappa_2 + \kappa_1 \le \gamma(Q) \le 2(\kappa + \kappa_2) + \kappa_1$, де $1 \le 2\kappa_2 + \kappa_1$.

Доведення. Нехай для площинного графа G виконуються умови теореми 1 як мінімального відносно заданої множини M з кліткової довжиною d.

Доведення співвідношення 1. За визначенням 5 існує вкладення f графа G в N_d неорієнтовану поверхню роду d, $d > 0$, при якому задана множина M розміщуватиметься на границі клітки s_0. Продовжимо вкладення f шляхом розміщення у середину s_0 ребер та вершин простої зірки $St_{|M\|}(v)$. Виконаємо ототожнення пар точок складених з елементів множини та висячих вершин зірки. Отримуємо вкладення графа Q у N_d, як φ-образа пари $G + St_{|M\|}(v)$ при ототожненні пар точок з множини M та з висячих вершин зірки $St_{|M\|}(v)$, тобто $\gamma(Q) \le d$. З умови $t_G(M) \ge 2$ випливає наявність у графі G одного з наступних підграфів, гомеоморфних наступним графам:

– K_4, всі вершини або дві точки несуміжних ребер якого належать множині M;

– $K_{2,3}$, у якого три вершини степені 2 належать M;

– $K_5 \setminus (a,b)$, у якого вершини видаленого ребра належать M.

Приєднавши до точок множини M на одному з цих підграфів висячі вершини простої зірки матимемо підграф Куратовського та нерівність $1 \le \gamma(Q)$.

Оскільки маємо умову $1 \le \kappa d \le 3$, то кліткова зірка $T(M)$ множини M має не більше чотирьох кліток площинного графа G, на границях яких лежать точки множини M. При $d = 3$ маємо наступні варіанти які вичерпують можливі випадки:

– центральна клітка та три клітки, суміжні з нею і несуміжні між собою;

– центральна клітка, з якою суміжна четверта, яка не суміжна з іншими клітками кліткової зірки $T(M)$, та ланцюжок з трьох кліток.

При $d = 3$ маємо $\kappa d = 4$ та рівність $\gamma(Q) = 3$. Тобто маємо суперечність умові твердження 1.

При $d = 2$ маємо наступні варіанти, які вичерпують можливі випадки для κd, де $\kappa d = 3$:

– або центральна клітка та дві клітки суміжні з нею і несуміжні між собою;

– або центральна клітка в кліткову ланцюжку з трьох кліток.

При $d = 2$ має місце рівність $\gamma(Q) = 3$. Тобто маємо $d = \gamma(Q)$.

Доведення співвідношення 1 закінчено.

Доведення співвідношення 2 спиратиметься на той факт, що при лінійному синтезі по ребру чи частині ребра, кінцеві точки якого належать як множині M, так і границі зовнішньої грані. Доведення нерівності $d_G(M) \le d_{G_i}(M_i) + d_{G_j}(M_j)$ випливатиме з вкладення графа G_j в середину клітки з множини покриття точок множини M_i графа $f(G_i)$, яка не входить до множини з кліток покриття множини M_j точок графа G_j. Не виконуючи ототожнення пар точок чи ланцюгів, матимемо покриття множини M клітками об'єднання множин кліткових покриттів множин M_i, M_j. Тобто маємо верхню межу для $d_G(M)$. Оскільки довільну клітку вкладеного у площину графа можливо вважати зовнішньою гранню, то будемо вважати, що вкладення мінімальних графів G_i, G_j з наперед заданими множинами точок M_{G_i}, M_{G_j} критичних відносно кліткової відстані $d_{G_i}(M_i), d_{G_j}(M_j)$, відповідно, мають саме таку клітку з підмножини кліток, що реалізує кліткову довжину $d_{G_i}(M_i), d_{G_j}(M_j)$ та на її границі містяться частини графів, що підлягають ототожненню. Тоді при ототожненні по точках чи простих ланцюгах замість двох кліток буде одна зовнішня грань з границею, склеєною з границь двох зовнішніх граней без ототожнених пар вершин чи ланцюгів, а всі інші елементи множин реалізації кліткової відстані увійдуть до об'єднаної множини кліток, яка реалізує кліткову відстань $d_G(M)$ та для якої матиме місце нерівність $d_G(M) \ge d_{G_i}(M_i) + d_{G_j}(M_j) - 1$, де $i = 1, 2, ..., 9$, $j = 1, 2, 3, 4$. Таке доведення частково показано на рис. 6.

Доведення співвідношення 3 аналогічне доведенню співвідношення 2.

Співвідношення 4 показано на 15-й та 14-й картах рис. 2.

Доведення співвідношення 5. Доведемо верхню межу оцінки роду графа *Q*. Завдяки характеристикам $t_G(M)$, $\theta_G(M)$ множини кліток, на чиїх границях розташовано непусті підмножини заданої множини *M*, можливо приклеїти до евклідової площини 2-ручки у кількості $t_G(M) - \theta_G(M) - 1$ штук так, щоб один кінець кожної 2-ручки приєднувався до s_1, на границі якої розміщено підмножину M_1, а інший кінець ручки приєднувався до іншої клітки покриття множини *M*, за винятком однієї 2-клітки $s_{|M|}$, яка має на границі підмножину M'. Вважатимемо, що від s_1 до цієї клітки $s_{|M|}$ можна прокласти клітковий ланцюг з найменшою клітковою відстанню довжиною $d_H(M_1, M')$ серед всіх кліткових ланцюгів від s_1 до інших кліток покриття.

Якщо $d_G(M_1, M') > 3$, то приклеїмо одним кінцем до s_1, а другий кінець додаткової $t_G(M) - \theta_G(M)$-ї 2-ручки до s'' – сусідньої клітки відносно $s_{|M|}$ та приклеїмо стрічку Мебіуса так, щоб на ній вкладалася частина спільного ребра або частини ребер кута між клітками $s_{|M|}$, s''. Таким чином побудуємо неорієнтовану поверхню роду $2(t_G(M) - \theta_G(M)) + 1$ з не 2-кліткою, на границі якої буде розміщено множину *M*.

Якщо $d_G(M_1, M') = 3$, то приклеїмо дві стрічки Мебіуса до кліткового ланцюга та розмістимо на них частини спільних ребер або ребер кута між границями сусідніх кліток ланцюга.

Якщо $d_G(M_1, M') = 2$, то приклеїмо одну стрічку Мебіуса до кліткового ланцюга та розмістимо на них частину спільного ребра або ребер кута між границями сусідніх кліток ланцюга.

Нерівність $\gamma(Q) \le 2(t_G(M) - \theta_G(M) - 1) + d$, де $1 \le d \le 2$, доведена.

Для доведення нижньої оцінки роду графа *Q* використаємо формулу Ейлера для роду неорієнтованої поверхні $2 - \gamma(Q) = v(Q) - e(Q) + s(Q)$ та значень $D_G(M)$, $D_G(M) = D = k_1 + 2k_2$, де k_i – число кліткових ланцюгів довжини i множини M, де $k_1 + k_2 > 0$, $i = 1, 2$. Для вкладення простої зірки з $|M|$ висячими ребрами в середину не 2-клітки s_0 треба перетворити на цю клітку кліткову зірку множини точок M графа G шляхом приєднання D стрічок Мебіуса до кліток ланцюгів евклідової площини так, щоб розмістити на них спільне ребро сусідніх кліток ланцюга або частину цього ребра або частини ребер кута між сусідніми клітками. Таким чином отримаємо, що $v(Q) = v + 1$, $e(Q) = e + |M|$, $s(Q) = s - (k_1 + 2k_2) + |M|$, де v – число вершин, e – число ребер та s – число граней площинного графа *G*. Отримуємо, що $2 - \gamma(Q) = v + 1 - e - |M| + s - (k_1 + 2k_2) + |M| =$ $= v - e + s - 2D + k_2 + 1 = 3 - 2D + k_2$, або $-\gamma(Q) = 1 - 2D + k_2$. При $D = 1$ матимемо $k_1 = 1$ та $k_2 = 0$, тоді $\gamma(Q) = 1$. При $D = 2$ матимемо $k_1 = 0$ та $k_2 = 1$, тоді $\gamma(Q) = 2$. Зауважимо, що неможливим є випадок коли $k_1 = 2$ та $k_2 = 0$, бо тоді $\gamma(Q) = 2 - 2 = 0$, що суперечить визначенню кліткової відстані довжиною 2. Тобто $\gamma(Q) \ge D_G(M)$, де $D_G(M) = D$, $D \in \{1, 2\}$.

Доведемо мінімальність цього вкладення графа Q в неорієнтовану поверхню роду $\gamma(Q)$ методом від зворотнього. Припустимо, що існує інше вкладення графа Q в неорієнтовану поверхню N' меншого роду ніж $\gamma(Q)$. Тоді матимемо стрічку Мебіуса *h*, вільну від ребер графа Q. Тобто схрещена на площині пара ребер вкладена, щонайменше, одним ребром на іншій зовнішній відносно ребер графа *G*, стрічці h', на яку вкладено як ребро графа *G*, так і висяче ребро зірки. Видалимо всі висячі ребра та отримаємо звуження цього вкладення, яке розміщуватиме на неорієнтованій поверхні N' меншого роду ніж $\gamma(Q)$ множину точок *M* на границі однієї клітки, яка є 2-кліткою з приклеєними $\gamma(N')$, $\gamma(N') < D$, стрічками, на яких вкладені тільки ребра графа *G*. Тим самим отримуємо, що множина М матиме кліткову відстань меншої довжини ніж D, що суперечить умові співвідношення 5 твердження 1. Припущення неправильне. Таким чином доведена подвійна нерівність: $D \le \gamma(\mathrm{Q}) \le 2(t_G(M) - \theta_G(M) - 1) + D$, де $1 \le D \le 2$. Доведення теореми 2 завершено.

Наслідок 1. Якщо в співвідношенні 5 замінити зірки на квазізірку з центром – графом *H*, який належить заданій множині мінімальних площинних графів з кліткововою досяжністю довжини $d_H(M')$, $1 \le d_H(M') \le 2$, то неорієнтований рід $\gamma(Q)$ графа Q буде залежати від $\alpha(G,H)$, $\alpha(G,H) > 0$, – мінімального числа перетинів висячих ребер квазізірки з тими її ребрами, що між собою не утворюють кліткований кут, де мінімум взято по всім неізоморфним вкладенням квазізірки у клітку евклідової площини з приклеєними стрічками у кількості $D_G(M)$, причому пари паралельних ребер двох графів K_4, склеєних по вершині, ребру або частині ребер, розміщуються саме на тих стрічках Мебіуса, де розміщено одне з двох висячих ребер, що перетинались на площині. Тоді матимемо нерівність: $D_G(M) + d_H(M') \le \gamma(\mathrm{Q}) \le 2(t_H(M') - \theta_H(M') + t_G(M) - \theta_G(M) - 1) + \alpha(G,H)$.

На рис. 6 показано приклади лінійного синтезу кількох копій графа K_4 чи $K_{2,3}$. На 1-й карті граф отримано ототожненням трьох копій K_4 по парі ребер, на 2-й карті по ребру та половині ребра; обидва мають множини наведених точок з кліткововою відстанню 3. 3-й та 5-й графи склеєно з графів K_4 та $K_{2,3}$ шляхом ототожнення ребра та ланцюга довжини 2 мають множини з кліткововою відстанню1 та 2, відповідно. Прикладом нелінійного синтезу є 4-й граф та графи на 6-й, 7-й, 8-й картах. Побудовані мінімальні графи для множин з виділеними жирним вершинами кліткової довжини 2, 3 та 4, відповідно. Зайве ребро 3-го графа показано пунктиром на 4-му. Множина *M* з наведених чорним вершин графів має вказану тут кліткову відстань. На 8-й карті граф без ребра, показаного пунктиром, має число досяжності 4 множини *M*, а кліткова відстань множини *M* дорівнює 3. На 10-й карті наведено заштриховану клітку на границі якої вкладено множину жирно наведених точок графа з 9-ї карти.

Теорема 3. Нехай задано φ-перетворення пари $(G, St_{|M|}(H))$ шляхом ототожнення кожної пари (точки з M_G – висячої вершини з множини M' квазізірки $St_{|M|}(H)$) на вершину графа *Q*, де площинний граф G з множиною точок M_G, потужності $|M|$, яка має скорочену кліткову відстань довжини $D_G(M)$, та квазізірки з центром H – площинним графом з заданою підмножиною вершин M_H, що належать до кінцевих вершин висячих ребер, та має кліткову відстань довжини $D_H(M_H) = 1$, де H гомеоморфний K_4 або $K_{2,3}$ чи іншому графу, поданому в лемі 3, а множина висячих вершин M' має потужність $|M'|$, $|M'| \ge |M|$.

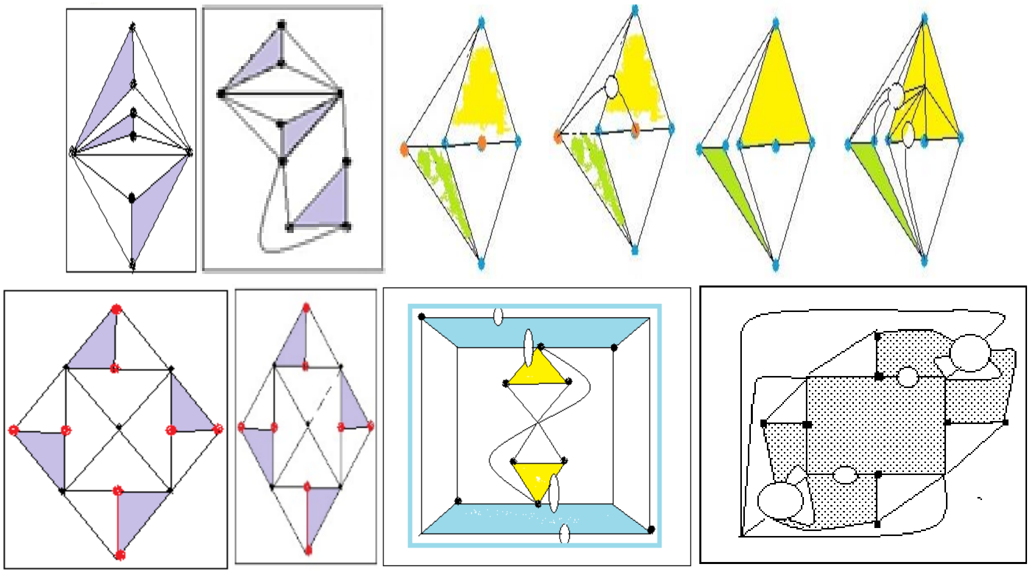

РИС. 6. Приклади лінійного синтезу мінімальних графів з кліткововою відстанню 3 (карти 1, 2, 5) та нелінійного синтезу (карти 3, 7). Інші карти з 8-ї по 11-ту містять пояснення до теореми 2

Якщо виконуються наступні умови:

1. Вкладення f графа G в неорієнтовану поверхню N роду $D_G(M)$ реалізує $t_G(M)\geq 2$, $\theta_G(M)\geq 0$ та кліткову відстань довжини $D_G(M)$ множини точок M на границі клітки s, $s\in\Sigma_0\setminus f(G)$, причому $f(M)\subset\partial s$, $D_G(M)=2(t_G(M)-\theta_G(M)-1)+k_1(M)+2k_2(M)$, де $0<k_1(M)+2k_2(M)\leq 3$.

2. Вкладення f', $f':H\to N_H$ – вкладення графа H у неорієнтовану поверхню N_H роду $\max D_H(M_H)$, яке реалізує $t_H(M_H)\geq 2$, $\theta_H(M_H)\geq 0$ та кліткову відстань довжини $D_H(M_H)$, та розміщує на границі клітки s' $s'\in\Sigma_0\setminus f(H)$, $f(M_H)\subset\partial s_H$, $D_H(M_H)=2(t_H(M_H)-\theta_H(M_H)-$ $-\theta_H(M_H)-1)+k_1(M_H)+2k_2(M_H)$, де $0<k_1(M_H)+2k_2(M_H)\leq 3$.

3. Множину висячих ребер квазізірки $St_{|M|}(H)$ розбито на непусті підмножини $M_i^{'}$, так щоб до однієї підмножини увійшли ребра кутів та ребра, які перетинаються між собою у внутрішніх точках. Позначимо $\alpha(G,H)$, $\alpha(G,H)$ – мінімальне число перетинів у внутрішніх точках всіх висячих ребер квазізірки (разом з тими її ребрами, що утворюють клітковий кут), $\alpha(K_4,K_4)$ – число графів K_4 з паралельними ребрами, які розміщуються на стрічках Мебіуса разом з висячими ребрами квазізірки, взятими за всіма неізоморфними вкладеннями квазізірки у клітку s з множини $\Sigma_0\setminus f(G)$, де на границі ∂s розміщена множина М та до евклідової площини Σ_0 приклеєні $D_H(M_H)$ стрічки Мебіуса.

Тоді неорієнтований рід $\gamma(Q)$ графа Q задовольняє подвійній нерівності:

$$\min(D_G(M)+D_H(M_H))\leq\gamma(Q)\leq\max(D_G(M)+D_H(M_H))+\alpha(G,H)-\alpha(K_4,K_4),$$

де $\max(D_G(M)+D_H(M_H))$, $\min(D_G(M)+D_H(M_H))$ – відповідно найбільша чи найменша сума з можливих значень скороченої кліткової відстані тобто числа 2-ручок та двох додатніх ненульових чисел $k_1(M)+2k_2(M)$, $k_1(M_H)+2k_2(M_H)$, кожне з яких не більше 3.

Доведення. Нехай виконуються всі умови теореми 2.

Позначимо f', $f': H \to N_H$ – вкладення графа H у неорієнтовану поверхню N_H роду $\max D_H(M_H)$, яке реалізує кліткову відстань довжини $D_H(M_H)$ та розміщує на границі клітки s'.

Виріжемо у середині кліток s, s' регулярні підклітки τ, τ' та ототожнимо границі цих кліток, зберігаючи орієнтацію. Тим самим склеїмо дві клітки в трубку $h(s,s')$ та неорієнтовані поверхні N, N_H в одну неорієнтовану поверхню Π роду $D_G(M)+D_H(M_H)$, в яку вкладенням f'', $f''=f+f'$, вкладені графи G, H. Продовжимо f'' на всі висячі ребра квазізірки $St(H)$, допускаючи розміщення на одній стрічці Мебіуса всіх тих ребер або ребер кутів, що між собою перетинаються у внутрішніх точках як ребра кільцевих графів гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$. Якщо є r місць перетину висячих ребер, то потрібно приклеїти r стрічок Мебіуса до неорієнтованої поверхні Π та отримати неорієнтовану поверхню Π' роду $D_G(M)+D_H(M_H)+r$. Тоді неорієнтований рід $\gamma(Q)$ графа Q задовольняє подвійній нерівності: $\gamma(Q) \le \max(D_G(M)+D_H(M_H))+\alpha(G,H)$, де $\max(D_G(M)+D_H(M_H))$, $\min(D_G(M)+D_H(M_H))$ – відповідно найбільша та найменша сума з можливих значень скороченої кліткової відстані, тобто числа 2-ручок та двох додатніх ненульових чисел $k_1(M)+2k_2(M)$, $k_1(M_H)+2k_2(M_H)$, кожне з яких не більше 3.

Доведемо нерівність: $\min(D_G(M)+D_H(M_H)) \le \gamma(Q)$, яка відповідає найменшій сумі з можливих значень скороченої кліткової відстані множин M та M_H, тобто немає 2-ручок та $\alpha(G,H)=0$. Маємо обчислити найменше число з двох додатніх ненульових сум $k_1(M)+2k_2(M)$, $k_1(M_H)+2k_2(M_H)$, кожне з яких не більше 3. Розглянемо f_G, f_H мінімальні вкладення графів G, H в евклідову площину. Вважатимемо, що s_H – зовнішня грань графа $f_H(H)$ вкладена в середину клітки s, де $\partial s \cap \partial s_H = \varnothing$. Продовжимо f_G, f_H до вкладень f_G', f_H' в неорієнтовані поверхні (утворені шляхом приєднання, хоча б, пари стрічок Мебіуса), на яких реалізуються $D_G(M), D_H(M_H)$, розміщуючи на стрічках частини спільних ребер, і таким чином множини точок M та M_H опиняться на границях кліток s' та s_H', похідних від кліток s та s_H, де $f_G'(M) \subset \partial s'$, $f_H'(M_H) \subset \partial s_H'$, відповідно. Висячі ребра квазізірки $St_{|M|}(H)$ розмістимо вкладенням f_H'' у кільце $s' \setminus s_H'$ без перетину у внутрішніх точках ребер, яке на інших ребрах графа H співпадає з f_H'. Покажемо, що вкладення $f_G' + f_H''$ мінімальне. За формулою Ейлера $2-\gamma(Q)=v(Q)-e(Q)+s(Q)$. Тоді $v(Q)=v(G)+v(H)$, де $e(Q)=e(G)+e(H)+|M|$, $s(Q)=s(G)-1+s(H)-1+1-(k_1(G)+2k_2(G)+1)-$ $-(k_1(H)+2k_2(H)+1)$. Підставимо $v(Q)$, $e(Q)$, $s(Q)$ в формулу Ейлера: $2-\gamma(Q)=$ $=v(G)+v(H)-e(G)-e(H)-|M|+s(G)-1+s(H)+|M|-(k_1(G)+k_2(G)+1)-(k_1(H)+k_2(H)+1)$. Тобто $2-\gamma(Q)=v(G)+v(H)-e(G)-e(H)+s(G)+s(H)-k_1(M)+k_2(M)-k_1(M_H)+k_2(M_H)-3$. Тоді $-\gamma(Q)=2-k_1(M)-2k_2(M)-k_1(M_H)-2k_2(M_H)-3=-1-D_G(M)-D_H(M_H)$. Або $\gamma(Q)=1+D_G(M)+D_H(M_H)$. Оскільки є вкладення $f_G' + f_H''$ обох графів у неорієнтовану поверхню, то має бути хоча б одна стрічка Мебіуса. Тобто виконується нерівність $D_G(M) \ge 1$ або нерівність $D_H(M_H) \ge 1$. Тоді найменша сума з можливих значень скороченої кліткової відстані множин M та M_H задовольняє рівності $D_G(M)+D_H(M_H)=1$. Тоді матиме місце рівність: $\gamma(Q)=2$. Нерівність: $\min(D_G(M)+D_H(M_H)) \le \gamma(Q)$ доведена.

Довести мінімальність цього вкладення графа Q у неорієнтовану поверхню роду $\gamma(Q)$ можливо методом від зворотнього. Припустимо, що існує інше вкладення графа Q у неорієнтовану поверхню N' меншого роду ніж $\gamma(Q)$, тобто $\gamma(N')<D$, де $\min(D_G(M)+D_H(M_H))=D$. Тоді матимемо h – вільну від ребер графа Q стрічку Мебіуса, тобто схрещена на площині пара ребер вкладена, щонайменше, одним ребром на іншій зовнішній відносно образів ребер графів *G* та *H* стрічці h', на яку вкладено ребро графа *G* чи висяче ребро квазізірки $St_{|M|}(H)$, а також ребро графа *H*. Видалимо всі висячі ребра квазізірки $St_{|M|}(H)$ та отримаємо звуження цього вкладення яке розміщуватиме на неорієнтованій поверхні N' меншого роду ніж $\gamma(Q)$ множину точок *M* на границі однієї клітки, яка є 2-кліткою з приклеєними стрічками у кількості $\gamma(N')$, де $\gamma(N')<D$, на яких вкладені тільки ребра графів *G* та *H*. Оскільки ці графи не мають спільних ребер, то одна зі спільних стрічок буде вільною від схрещених ребер графів *G* та *H*. Тим самим матимемо наступне: або множина *M* матиме кліткову відстань меншої довжини ніж $D_G(M)$, або множина M_H матиме кліткову відстань меншої довжини ніж $D_H(M_H)$, що суперечить умові. Припущення неправильне.

Доведення теореми 3 закінчено.

Наслідок 1. Нехай граф *Q* подано двома φ-перетвореннями двох невпорядкованих пар квазізірок $(St_{|V_1|}(H_1), St_{|V_2|}(H_2))$, які мають центрами площинні графи H_i та множини висячих вершин V_i, які інцидентні вершинам з множини M_i, причому множини M_i – мінімальні відносно довжини кліткової досяжності $d_{H_i}(M_i)=D_i$ при операції видалення довільної точки з M_i, де $i=1, 2$.

Тоді мають місце співвідношення:

1) неорієнтований рід $\gamma(Q)$ задовольняє нерівності: $\sum_{i=1}^{2} d_{H_i}(M_i) \le \gamma(Q)$;

2) якщо площинні графи H_i, $i=1, 2$, – мінімальні відносно довжини кліткової досяжності $d_{H_i}(M_i)=D_i$, де $\sum_{i=1}^{2} d_{H_i}(M_i)=3$, при операції видалення довільного ребра, то граф *Q* – обструкція поверхні Клейна.

Доведемо співвідношення 2. Розглянемо граф *Q* як φ-образ пари квазізірок $(St_{|V_1|}(H_1), St_{|V_2|}(H_2))$ з множиною ототожнених у точку пар точок складених площинних графів H_i та множини висячих вершин V_i, що інцидентні вершинам з множини M_i, де $i=1, 2$.

Висновок. Методом φ-перетворень досліджено структуру площинних графів із заданим числом досяжності та кліткової відстані наперед заданої множини точок. Наведено списки площинних графів з заданою множиною точок з кліткової відстанню 1 та 2. Встановлено межі неорієнтованого роду графів, поданих як φ-образ простої зірки чи квазізірки та площинного графа при попарному ототожненні висячих вершин з точками множини площинного графа заданої кліткової відстані.

Авторські внески: Петренюк В.І – вступ, леми 1, 2 і теореми 1, 2, рис.1, 2, 3, Петренюк Д.А – леми 3, 4 і теореми 3, рис. 4, 5, 6.

Подяка. Завдяки воїнам ЗСУ мали час на частковий розв’язок поставленої задачі.

Список літератури

1. Хоменко М.П. φ-перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев, 1973. 383 с.
2. Хоменко М.П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев, 1970. 299 с.

3. Mohar B., Thomassen C. Graphs on Surfaces. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html
4. Петренюк В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. № 33. С. 105–109. Google Scholar
5. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894
6. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory*, Series B. 1989. 46. P. 173–231.
7. Bienstock D., Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*. 1992. 55. P. 163-189. https://doi.org/10.1016/0095-8956%2892%2990040-5
8. Bienstock D., Monma C.L. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput*. 1988. 17. P. 53–76. https://doi.org/10.1137/0217004
9. Mohar B. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 2001. *Series B*. 82. P. 102–117. https://doi.org/10.1006.jctb.2000.2026
10. Mohar B. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics*. 1997. 176. P. 203–210. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00363-9
11. Петренюк В.І. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества их точек. Депонований рукопис на 51 стор., № 2245-Ук86. 1986.
12. Петренюк В.І., Петренюк Д.А., Оришака О.В. Структура проективно площинних підграфів графів-обструкцій заданої поверхні. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2022, № 2. С. 1–20 https://doi.org/10.34229/2707-451X.22.2
13. Петренюк В.І., Петренюк Д.А. Про алгоритм побудови 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна. *Фізико-математичне моделювання та нформаційні ехнології*. 2003. № 37. С. 72–74. http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/308
14. R. van Dam E., Koolen J.H., Tanaka H. Distance-regular graphs, E-JC, DS22: Apr 15. 2016. https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Surveys
15. Mohar B., Škoda P. Excluded minors for the Klein bottle I. Low connectivity case. *Journal of Combinatoria*. 2024. Vol. 164. P. 299–320. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.10.002
16. Mohar B., Škoda P. Excluded minors for the Klein bottle II. Low connectivity case, *Journal of Combinatoria*. 2024. Vol. 166. P. 80–108. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2023.12.006

Одержано 10.03.2025

Петренюк Володимир Ілліч,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Центральноукраїнського національного технічного університету, Кропивницький,
https://orcid.org/0000-0001-7313-9642
petrenjukvi@i.ua

Петренюк Дмитро Анатолійович,
кандидат фізико-математичних наук, молодший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
guitar-player@ukr.net

УДК 519.85

В.І. Петренюк [1] *, Д.А. Петренюк [2]

Про синтез площинних графів із заданими властивостями

[1] *Центральноукраїнський національний технічний університет, Кропивницький*
[2] *Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ*
* *Листування:* petrenjukvi@i.u

Розглянуто задачу вивчення структурних властивостей площинних підграфів $G \backslash v$, де v – довільна вершина графа G неорієнтованого роду, з використанням кліткових ланцюгів, які з'єднують граничні цикли із точками заданої множини M графа $G \backslash v$. Через суму мінімальних за довжиною та кількістю кліткових ланцюгів, покриваючих M, визначаємо кліткову відстань заданої підмножини множини точок графа G. Мета – синтез площинних графів певної підмножини точок із фіксованою довжиною кліткової відстані з, щонайменше, двох графів з підмножинами точок меншої кліткової відстані шляхом ототожнення по простих ланцюгах або простих циклах. До отриманих таким чином графів, мінімальних відносно операції видалення довільного ребра чи точки з *M*, приєднуємо просту зірку чи квазізірку з центром – площинним графом шляхом попарного ототожнення висячих вершин з точками множини *M* у точки графа *G*. Дотична задача розглядалася в [4]. В роботах [7, 8] розглядалась подібна задача покриття множини вершин не більше ніж заданим *k* – числом граничних циклів 2-кліток та обраховано число мінімальних площинних графів для *k*=3. Для довільного *k* має місце експоненціальної часової складності алгоритм побудови мінімальних графів. Поняття кліткової відстані наведене в [9, 10], де досліджено нижню границю орієнтованого роду apex-графа, утвореного з площинних графа і простої зірки, приклеєної до заданої множини точок графа. Певним чином з цією задачею пов'язана гіпотеза Ердьоша [3] про покриття графів-обструкцій неорієнтованої поверхні роду *k*, де *k*>0, найменшою по включенню множиною із *k*+1-го графа гомеоморфного K_5 чи $K_{3,3}$.

Гіпотетичним є їх отримання шляхом рекурсивного φ-перетворення графа-обструкції проективної площини та копії його площинного підграфа, заданого на вершинах, ребрах чи частинах ребер, або простих ланцюгах, тобто на досяжних частинах так званого графа-основи (графа гомеоморфного графу Куратовського і вкладеного в проективну площину).

Основний результат – методом φ-перетворень досліджено структуру площинних графів із заданим числом досяжності та кліткової відстані наперед заданої множини точок. Наведено списки площинних графів з заданою множиною точок з кліткововю відстанню 1 та 2. Встановлено межі неорієнтованого роду графів, поданих як φ-образ простої зірки чи квазізірки та площинного графа при попарному ототожненні висячих вершин з точками множини площинного графа заданої кліткової відстані.

Ключові слова: φ-перетворення графів, неорієнтована поверхня, площинний граф, apex-граф.

UDC 519.85

Volodymyr Petrenjuk [1 *], Dmytro Petreniuk [2]

On the Synthesis of Planar Graphs with Given Properties

[1] *Central Ukrainian National Technical University*
[2] *V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv*
[*] *Correspondence: petrenjukvi@i.u*

The problem of studying the structural properties of planar subgraphs *G\v*, where v is an arbitrary vertex of a graph *G* of undirected genus, is considered, using cell chains that connect limit cycles with points of a given set *M* of the graph *G\v*. Through the sum of the minimum in length and a number of cell chains covering *M*, we determine the cell distance of a given subset of the set of points of graph *G*. The goal is to synthesize planar graphs of a certain subset of points with a fixed length of the cell distance from at least two graphs with subsets of points of a smaller cell distance by identification by simple chains or simple cycles. To the graphs thus obtained, minimal with respect to the operation of removing an arbitrary edge or point from *M*, we attach a simple star or quasi-star with a center – a planar graph by pairwise identification of hanging vertices with points of the set *M* to points of the graph *G*. The tangent problem was considered in [6]. In [7, 8], a similar problem of covering a set of vertices by no more than a given *k* – number of cycles-boundaries of 2-cells was considered, and the number of minimal planar graphs was calculated for *k*=3, for an arbitrary *k* we will have an algorithm for constructing minimal graphs with exponential time complexity. The concept of cell distance is given in [9, 10], where the lower bound of the oriented genus of the apex graph formed from planar graphs and a simple star glued to a given set of graph points was investigated. In a certain way, this problem is related to the Erdős conjecture [3] about the covering of obstruction graphs of a nonorientable surface of genus *k*, where *k*>0, by the smallest set of inclusions from the *k*+1-th graph homeomorphic to K_5 or $K_{3,3}$. In [5], the existence of a finite set of obstruction graphs for an nonorientable surface was proved.

The article has an introduction and a main part.

The main results – the structure of planar graphs with a given reachability number and a cell distance of a given set of points was investigated using the φ-transformation method; lists of planar graphs with a given set of points with cell distances 1 and 2 were given; the boundaries of an undirected genus of graphs represented as a φ-image of a simple star or quasi-star and a planar graph were established with pairwise identification of hanging vertices with points of the set of a planar graph of a given cell distance were established.

Keywords: φ-transformation of graphs, nonorientable surface, planar graph, apex-graph.