КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.64
DOI:10.34229/2707-451X.25.3.5

Є.Л. ХУРДЕЙ, В.В. ІВАНОВ

КУБАТУРНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ОСЦИЛЯЦІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ІЗ ЗАДАНИМИ СЛІДАМИ ФУНКЦІЇ НА ЛІНІЯХ

Дослідження присвячено чисельному інтегруванню функцій декількох змінних. Наведено кубатурну формулу наближеного обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій. Кубатурна формула у своїй побудові як дані про функцію використовує сліди на взаємно перпендикулярних лініях. На класі Гельдера та Ліпшиця отримано оцінку похибки наближення.

Ключові слова: *чисельне інтегрування функцій декількох змінних, швидкоосцилюючі функції багатьох змінних, кубатурні формули, цифрова обробка зображень.*

Вступ. У сучасній прикладній математиці зростає потреба в ефективних чисельних методах для обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних, зокрема у задачах цифрової обробки сигналів, комп'ютерної томографії, квантової механіки та електродинаміки [1]. Класичні методи інтегрування часто виявляються недостатньо точними або надто ресурсоємними при застосуванні до функцій із високочастотними коливаннями [2]. Цей виклик стимулює розвиток нових підходів, серед яких особливе місце займає теорія інформаційних операторів (операторів О.М. Литвина) та пов'язаних із ними оптимальних алгоритмів чисельного інтегрування [3].

Значний внесок у цю галузь зроблено у працях І.В. Сергієнка, В.К. Задіраки, О.М. Литвина, О.П. Нечуйвітер, де було закладено теоретичні засади побудови оптимальних алгоритмів на основі обмеженої інформації про функцію [4– 6]. Такі методи забезпечують ефективне чисельне інтегрування навіть у випадках, коли функція задана лише на множині своїх слідів – на площинах, лініях, у точках [7–11]. У подальших роботах було запропоновано чисельні схеми інтегрування для дво- та тривимірних випадків, що демонструють оптимальні за порядком точності алгоритми, які забезпечують високу точність обчислення [11–14].

Окрему увагу привертають підходи, що поєднують інтерфлетацію та інтерлінацію з побудовою кубатурних формул, які адаптуються до класів функцій Гельдера та Ліпшиця. У цьому контексті, запропонована в даній статті кубатурна формула для наближеного обчислення потрійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального вигляду становить актуальний науковий інтерес. Метод використовує сліди функцій на лініях, отримано строгі теоретичні оцінки похибок на класах Гельдера та Ліпшиця.

1. Постановка задачі. Для наближеного обчислення інтегралу

$$I_S(\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\omega g(x,y,z)\,dxdydz,\ \ |\omega|\ge 2\pi, \qquad (1)$$

побудувати кубатурну формулу, яка в своїй побудові використовує значення функції $g\left(x,y,z\right)$ на взаємно перпендикулярних лініях. При побудові методу обчислення використати інформаційні оператори О.М. Литвина. Отримати оцінку похибки наближення на класі Гельдера, Ліпшиця.

2. Похибка чисельне інтегрування функцій трьох змінних із заданими слідами на взаємно перпендикулярних лініях на класах Гельдера та Ліпшиця. Розглянемо клас дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G=\left[0,1\right]^3$ і таких, що задовольняють умові Гельдера по кожній змінній:

$$\left|f\left(x_1,y,z\right)-f\left(x_2,y,z\right)\right|\le L\left|x_1-x_2\right|^{\alpha},\quad \left|f\left(x,y_1,z\right)-f\left(x,y_2,z\right)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|^{\alpha},$$

$$\left|f\left(x,y,z_1\right)-f\left(x,y,z_2\right)\right|\le L\left|z_1-z_2\right|^{\alpha}.$$

В класі функцій виділимо підклас функцій $C^2_{3,L,\bar{L},\tilde{L},\alpha}$, $0<\alpha\le 1$, що задовольняє додатковій умові:

$$\left|f\left(x_1,y_1,z_1\right)-f\left(x_2,y_1,z_1\right)-f\left(x_1,y_2,z_1\right)-f\left(x_1,y_1,z_2\right)+f\left(x_2,y_2,z_1\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(x_2,y_1,z_2\right)+f\left(x_1,y_2,z_2\right)-f\left(x_2,y_2,z_2\right)\right|\le\tilde{L}\left|x_1-x_2\right|^{\alpha}\left|y_1-y_2\right|^{\alpha}\left|z_1-z_2\right|^{\alpha},$$

$$\left|f\left(x_1,y_1,z\right)-f\left(x_2,y_1,z\right)-f\left(x_1,y_2,z\right)+f\left(x_2,y_2,z\right)\right|\le\bar{L}\left|x_1-x_2\right|^{\alpha}\left|y_1-y_2\right|^{\alpha},$$

$$\left|f\left(x_1,y,z_1\right)-f\left(x_2,y,z_1\right)-f\left(x_1,y,z_2\right)+f\left(x_2,y,z_2\right)\right|\le\bar{L}\left|x_1-x_2\right|^{\alpha}\left|z_1-z_2\right|^{\alpha},$$

$$\left|f\left(x,y_1,z_1\right)-f\left(x,y_2,z_1\right)-f\left(x,y_1,z_2\right)+f\left(x,y_2,z_2\right)\right|\le\bar{L}\left|y_1-y_2\right|^{\alpha}\left|z_1-z_2\right|^{\alpha}.$$

Означення 1. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на лініях $\left\{\left(x,y,z\right):\ x=x_k,\ y=y_j,\quad x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\right.$ $\left.y_j=j\Delta-\frac{\Delta}{2},\Delta=\frac{1}{\ell},\ k,j=\overline{1,\ell},0\le z\le 1\right\}$ розуміємо $f(x_k,y_j,z),\quad 0\le z\le 1$. Сліди функції на інших лініях визначаються аналогічно.

Введемо наступні позначення:

$$X_k=\left[x_{k-1/2},x_{k+1/2}\right],\ Y_j=\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right],\ \ Z_s=\left[z_{s-1/2},z_{s+1/2}\right],$$

$$\tilde{X}_{\tilde{k}}=\left[\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2},\tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}\right],\ \tilde{Y}_{\tilde{j}}=\left[\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2},\tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}\right],\ \ \tilde{Z}_{\tilde{s}}=\left[\tilde{z}_{\tilde{s}-1/2},\tilde{z}_{\tilde{s}+1/2}\right],$$

$$h^0_{1k}(x)=\begin{cases}1, x\in X_k,\\ 0, x\notin X_k,\end{cases}\quad h^0_{2j}(y)=\begin{cases}1, y\in Y_j,\\ 0, y\notin Y_j,\end{cases}\quad h^0_{3s}(z)=\begin{cases}1, z\in Z_s,\\ 0, z\notin Z_s,\end{cases},$$

$$\tilde{h}^0_{1\tilde{k}}(x)=\begin{cases}1, x\in \tilde{X}_{\tilde{k}},\\ 0, x\notin \tilde{X}_{\tilde{k}},\end{cases}\quad \tilde{h}^0_{2\tilde{j}}(y)=\begin{cases}1, y\in \tilde{Y}_{\tilde{j}},\\ 0, y\notin \tilde{Y}_{\tilde{j}},\end{cases}\quad \tilde{h}^0_{3\tilde{s}}(z)=\begin{cases}1, z\in \tilde{Z}_{\tilde{s}},\\ 0, z\notin \tilde{Z}_{\tilde{s}},\end{cases},$$

$$x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\ y_j=j\Delta-\frac{\Delta}{2},\ \ z_s=s\Delta-\frac{\Delta}{2},\quad \Delta=\frac{1}{\ell},\ k,j,s=\overline{1,\ell},$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}}=\tilde{k}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{y}_{\tilde{j}}=\tilde{j}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{z}_{\tilde{s}}=\tilde{s}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\quad \Delta_1=\frac{1}{\ell^{3/2}},\ \ \tilde{k},\tilde{j},\tilde{s}=\overline{1,\ell^{3/2}}.$$

Розглянемо оператори

$$J_1 f(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y, z) h_{1k}^0(x), \quad J_2 f(x,y,z) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j, z) h_{2j}^0(y), \quad J_3 f(x,y,z) = \sum_{s=1}^{\ell} f(x, y, z_s) h_{3s}(z),$$

$$\tilde{J}_1 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y, z) \tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x), \quad \tilde{J}_2 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y), \quad \tilde{J}_3 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} f(x, y, \tilde{z}_{\tilde{s}}) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z).$$

Розглянемо оператор кусково-сталої інтерфлетації

$$Ef(x,y,z) = J_1 f(x,y,z) + J_2 f(x,y,z) + J_3 f(x,y,z) -$$
$$- J_1 J_2 f(x,y,z) - J_2 J_3 f(x,y,z) - J_1 J_3 f(x,y,z) + J_1 J_2 J_3 f(x,y,z)$$

для якого виконуються властивості

$$Ef(x_k, y, z) = f(x_k, y, z), \quad k = \overline{1,\ell}, \quad Ef(x, y_j, z) = f(x, y_j, z), \quad j = \overline{1,\ell},$$
$$Ef(x, y, z_s) = f(x, y, z_s), \quad s = \overline{1,\ell}.$$

Розглянемо оператор кусково-сталої інтерлінації, побудований на основі інтерфлетації

$$\tilde{E}f(x,y,z) = J_1 \tilde{J}_2 f(x,y,z) + J_1 \tilde{J}_3 f(x,y,z) - J_1 \tilde{J}_2 \tilde{J}_3 f(x,y,z) + J_2 \tilde{J}_1 f(x,y,z) +$$
$$+ J_2 \tilde{J}_3 f(x,y,z) - J_2 \tilde{J}_1 \tilde{J}_3 f(x,y,z) + J_3 \tilde{J}_1 f(x,y,z) + J_3 \tilde{J}_2 f(x,y,z) - J_3 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x,y,z) -$$
$$- J_1 J_2 f(x,y,z) - J_1 J_3 f(x,y,z) - J_2 J_3 f(x,y,z) + J_1 J_2 J_3 f(x,y,z).$$

Для обчислення інтегралу

$$I(f) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z) dxdydz, \tag{2}$$

пропонується формула:

$$\Phi(f) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{E}f(x,y,z) dxdydz. \tag{3}$$

В роботі [15] для наближеного обчислення інтегралу (2) за формулою (3) отримано похибку наближення на класі диференційовних функцій. Отримаємо оцінку на класі Гельдера та Ліпшиця, яку в подальшому буде використано при отриманні оцінки похибки наближення тригонометричного інтегралу від функцій трьох змінних.

Теорема 1. Для кубатурної формули $\Phi(f)$ обчислення $I(f)$ справедлива наступна оцінка на класі Гельдера:

$$\left| I(f) - \Phi(f) \right| \le \frac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3 2^{3\alpha}} \frac{1}{\ell^{3\alpha}} + \frac{3\bar{L}}{(\alpha+1)^2 2^{2\alpha}} \frac{1}{\ell^{3\alpha}}.$$

Доведення. Оцінимо похибку наближення

$$\left| I(f) - \Phi(f) \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(f(x,y,z) - \tilde{E}f(x,y,z) \right) dxdydz \right| =$$

$$=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y,z)-Ef(x,y,z)+Ef(x,y,z)-\tilde{E}f(x,y,z)\right)dxdydz\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)-Ef(x,y,z)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|Ef(x,y,z)-\tilde{E}f(x,y,z)\right|dxdydz=I_1+I_2\,.$$

$$I_1=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y,z)-Ef(x,y,z)\right)dxdydz\right|\le\sum_{k=1}^{\ell-1}\sum_{j=1}^{\ell-1}\sum_{s=1}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\left|f(x,y,z)-Ef(x,y,z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\tilde{L}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\left|x-x_k\right|^{\alpha}\left|y-y_j\right|^{\alpha}\left|z-z_s\right|^{\alpha}dxdydz=$$

$$=\tilde{L}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\left(-\frac{\left(x_k-x\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_k}+\frac{\left(x-x_k\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{\left(y_j-y\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_j}+\frac{\left(y-y_j\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\right)\left(-\frac{\left(z_s-z\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_s}+\frac{\left(z-z_s\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{z_s}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\right)=$$

$$=\tilde{L}\ell^3\frac{\Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}\frac{\Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}\frac{\Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}=\frac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3\,2^{3\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}\,,$$

$$I_2=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|Ef(x,y,z)-\tilde{E}f(x,y,z)\right|dxdydz=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|J_1f\left(x,y,z\right)+J_2f\left(x,y,z\right)+J_3f\left(x,y,z\right)-\right.$$

$$-J_1J_2f\left(x,y,z\right)-J_2J_3f\left(x,y,z\right)-J_1J_3f\left(x,y,z\right)+J_1J_2J_3f\left(x,y,z\right)-$$

$$-J_1\tilde{J}_2f\left(x,y,z\right)-J_1\tilde{J}_3f\left(x,y,z\right)+J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3f\left(x,y,z\right)-J_2\tilde{J}_1f\left(x,y,z\right)-$$

$$-J_2\tilde{J}_3f\left(x,y,z\right)+J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3f\left(x,y,z\right)-J_3\tilde{J}_1f\left(x,y,z\right)-J_3\tilde{J}_2f\left(x,y,z\right)+J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2f\left(x,y,z\right)+$$

$$\left.+J_1J_2f\left(x,y,z\right)+J_1J_3f\left(x,y,z\right)+J_2J_3f\left(x,y,z\right)-J_1J_2J_3f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|J_1f\left(x,y,z\right)+J_2f\left(x,y,z\right)+J_3f\left(x,y,z\right)-\right.$$

$$-J_1\tilde{J}_2f\left(x,y,z\right)-J_1\tilde{J}_3f\left(x,y,z\right)+J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3f\left(x,y,z\right)-J_2\tilde{J}_1f\left(x,y,z\right)-$$

$$-J_2\tilde{J}_3f\left(x,y,z\right)+J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3f\left(x,y,z\right)-J_3\tilde{J}_1f\left(x,y,z\right)-$$

$$\left.-J_3\tilde{J}_2f\left(x,y,z\right)+J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(J_1-J_1\tilde{J}_2-J_1\tilde{J}_3+J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3\right)f\left(x,y,z\right)+\left(J_2-J_2\tilde{J}_1-J_2\tilde{J}_3+J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3\right)f\left(x,y,z\right)+\right.$$

$$\left.+\left(J_3-J_3\tilde{J}_1-J_3\tilde{J}_2+J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2\right)f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(J_1-J_1\tilde{J}_2-J_1\tilde{J}_3+J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3\right)f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(J_2-J_2\tilde{J}_1-J_2\tilde{J}_3+J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3\right)f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(J_3-J_3\tilde{J}_1-J_3\tilde{J}_2+J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2\right)f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left|\left(J_1-J_1\tilde{J}_2-J_1\tilde{J}_3+J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3\right)f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left|\left(J_2-J_2\tilde{J}_1-J_2\tilde{J}_3+J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3\right)f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \left|\left(J_3-J_3\tilde{J}_1-J_3\tilde{J}_2+J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2\right)f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz=$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left|f\left(x_k,y,z\right)-f\left(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}},z\right)-f\left(x_k,y,\tilde{z}_{\tilde{s}}\right)+f\left(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}},\tilde{z}_{\tilde{s}}\right)\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left|f\left(x,y_j,z\right)-f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j,z\right)-f\left(x,y_j,\tilde{z}_{\tilde{s}}\right)+f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j,\tilde{z}_{\tilde{s}}\right)\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \left|f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}},y,z_s\right)-f\left(x,\tilde{x}_{\tilde{k}},z_s\right)-f\left(x,y,z_s\right)+f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}},\tilde{x}_{\tilde{k}},z_s\right)\right|dxdydz\le$$

$$\le \bar{L}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\left|y-\tilde{y}_{\tilde{j}}\right|^{\alpha}\left|z-\tilde{z}_{\tilde{s}}\right|^{\alpha}dxdydz+$$

$$+\bar{L}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\left|x-\tilde{x}_{\tilde{k}}\right|^{\alpha}\left|z-\tilde{z}_{\tilde{s}}\right|^{\alpha}dxdydz+$$

$$+\bar{L}\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\left|x-\tilde{x}_{\tilde{k}}\right|^{\alpha}\left|y-\tilde{y}_{\tilde{j}}\right|^{\alpha}dxdydz=$$

$$=3\bar{L}\ell\ell^{3/2}\ell^{3/2}\Delta\frac{\Delta_1^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}\frac{\Delta_1^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}=\frac{3\bar{L}}{(\alpha+1)^2\,2^{2\alpha}}\Delta_1^{2\alpha}=\frac{3\bar{L}}{(\alpha+1)^2\,2^{2\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}.$$

Отже, $\left|I(f)-\Phi(f)\right|\le\dfrac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3\,2^{3\alpha}}\dfrac{1}{\ell^{3\alpha}}+\dfrac{3\bar{L}}{(\alpha+1)^2\,2^{2\alpha}}\dfrac{1}{\ell^{3\alpha}}$.

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Для кубатурної формули $\Phi(f)$ обчислення $I(f)$ справедлива наступна оцінка на класі Ліпшиця: $\left|I(f)-\Phi(f)\right|\le\dfrac{\tilde{L}}{64}\dfrac{1}{\ell^3}+\dfrac{3\bar{L}}{16}\dfrac{1}{\ell^3}$.

Доведення. Якщо в умові теореми 1 покласти $\alpha=1$, то отримаємо нерівність $\left|I(f)-\tilde{\Phi}(f)\right|\le\dfrac{\tilde{L}}{64}\dfrac{1}{\ell^3}+\dfrac{3\bar{L}}{16}\dfrac{1}{\ell^3}$. Теорема 2 доведена.

3. Кубатурна формула наближеного обчислення потрійного інтегралу від тригонометричних функцій із заданими значеннями фінкції на лініях. Для обчислення інтегралу (1), де функція $g(x,y,z)$ задовольняє умові Гельдера по кожній змінній, пропонується формула:

$$\Phi_s(\omega)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sin\left(\omega\tilde{E}g(x,y,z)\right)dxdydz\,.$$

Теорема 3. Для кубатурної формули $\Phi_S(\omega)$ обчислення $I_S(\omega)$ справедлива наступна оцінка на класі Гельдера:

$$\left|I_s(\omega)-\mathit{\Phi}_s(\omega)\right|\le\min\left(2,\frac{\omega\tilde{L}}{(\alpha+1)^3\,2^{3\alpha+1}\ell^{3\alpha}}+3\bar{L}\omega\cdot\frac{\Delta_1^{\;2\alpha}}{2^{2\alpha+1}(\alpha+1)^2}\right).$$

Доведення. При доведенні теореми 3 використаємо оцінки з теореми 1, а саме:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left|g(x,y,z)-Eg(x,y,z)\right|dxdydz\le\frac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3\,2^{3\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}},$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|Eg(x,y,z)-\tilde{E}g(x,y,z)\right| dxdydz \le 3\bar{L}\cdot\frac{\Delta_1^{2\alpha}}{4^{\alpha}(\alpha+1)^2}.$$

Маємо наступне:

$$\left|I_s(\omega)-\Phi_s(\omega)\right| \le \left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\omega g(x,y,z)dxdydz-\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\omega\tilde{E}g(x,y,z)dxdydz\right| \le$$

$$\le \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\sin\omega g(x,y,z)-\sin\omega\tilde{E}g(x,y,z)\right| dxdydz =$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|2\cos\frac{\omega(g(x,y,z)-\tilde{E}g(x,y,z))}{2}\sin\frac{\omega(g(x,y,z)-\tilde{E}g(x,y,z))}{2}\right| dxdydz \le$$

$$\le 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\sin\frac{\omega(g(x,y,z)-\tilde{E}g(x,y,z))}{2}\right| dxdydz \le$$

$$\le 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \min\left(1,\frac{\omega\left|g(x,y,z)-\tilde{E}g(x,y,z)\right|}{2}\right) dxdydz \le$$

$$\le 2\min\left(\int_0^1\int_0^1\int_0^1 dxdydz, \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\omega\left|g(x,y,z)-\tilde{E}g(x,y,z)\right|}{2} dxdydz\right) \le$$

$$\le 2\min\left(\int_0^1\int_0^1\int_0^1 dxdydz, \frac{\omega}{2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|g(x,y,z)-Eg(x,y,z)+Eg(x,y,z)-\tilde{E}g(x,y,z)\right| dxdydz\right) \le$$

$$\le 2\min\left(1,\frac{\omega}{2}\left(\frac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3 2^{3\alpha}\ell^{3\alpha}}+3\bar{L}\cdot\frac{\Delta_1^{2\alpha}}{2^{2\alpha}(\alpha+1)^2}\right)\right) \le$$

$$\le \min\left(2,\frac{\omega\tilde{L}}{(\alpha+1)^3 2^{3\alpha+1}\ell^{3\alpha}}+3\bar{L}\omega\cdot\frac{\Delta_1^{2\alpha}}{2^{2\alpha+1}(\alpha+1)^2}\right).$$

Теорема 3 доведена.

Теорема 4. Для кубатурної формули $\Phi_s(\omega)$ обчислення $I_s(\omega)$ справедлива наступна оцінка на класі Ліпшиця:

$$\left|I_s(\omega)-\Phi_s(\omega)\right| \le \min\left(2,\frac{\omega\tilde{L}}{16(\alpha+1)^3\ell^3}+3\bar{L}\omega\cdot\frac{\Delta_1^2}{8(\alpha+1)^2}\right).$$

Доведення. Якщо в умові теореми 3 покласти $\alpha = 1$, то отримаємо нерівність $\left|I_s(\omega) - \Phi_s(\omega)\right| \le \min\left(2, \frac{\omega \tilde{L}}{16(\alpha+1)^3 \ell^3} + 3\bar{L}\omega \cdot \frac{\Delta_1^2}{8(\alpha+1)^2}\right)$. Теорема 4 доведена.

Висновки. В роботі представлено кубатурну формулу наближеного обчислення потрійного інтегралу від тригонометричної функції. Особливістю запропонованої формули є використання в якості даних значень функцій на системах взаємно перпендикулярних ліній. Отримано похибку чисельного інтегрування на класі Гельдера, Ліпшиця. Подальшими кроками в дослідженні є побудова наближеного обчислення потрійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду, а також проведення чисельного експерименту, який би дозволив підтвердити теоретичні твердження та виявити потенційну спроможність запропонованих формул.

Авторські внески: Хурдей Є. Л. – побудовано кубатурну формулу для інтегрування тригонометричних функцій трьох змінних загального виду із використанням значень функції на взаємно перпендикулярних лініях; отримано оцінки похибки наближення на класах Гельдера та Ліпшиця. Іванов В.В. – запропоновано алгоритм наближеного обчислення інтегралів від функцій трьох змінних, отримано оцінки похибки наближення на класах Гельдера та Ліпшиця у випадку, коли інформація задана слідами функції на взаємно перпендикулярних лініях.

Список літератури

1. Gao J., Condon M., Iserles A. *Spectral computation of highly oscillatory integral equations in laser theory. Tech. Reports Numerical Analysis (NA2018/04). DAMPT: University of Cambridge.* 2018. 30 p.
2. Milovanovic G.V., Stanic M.P. Numerical Integration of Highly Oscillating Functions. Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions. 2014. P. 613–649.
3. Sergienko I.V., Lytvyn O.M. New Information Operators in Mathematical Modeling (A Review). *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. **54** (1). P. 21–30. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0004-5
4. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання. Київ: Наук. думка, 2012. 400 с.
5. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. Київ: Наук. думка, 2017. 336 с.
6. Sergienko I.V., Zadiraka V.K., Lytvyn O.M. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer. 2021. 378 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90908-6
7. Lytvyn O.M., Nechuiviter O.P. 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflatation. *Journal of Automation and Information Science.* 2012. **44** (3). P. 45–56. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v44.i3.40
8. Lytvyn O.M., Nechuiviter O.P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflatation. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. **50** (3). P. 410–418. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9629-1
9. Mezhuyev V.I., Lytvyn O.M., Nechuiviter O.P., Pershyna Y.I., Lytvyn O.O., Keita K.V. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions. *U.P.B. Sci. Bull., Series A.* 2017. **80** (30). P. 169–182.
10. Nechuiviter O.P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies. *Information Technologies and Learning Tools.* 2021. **2** (82). P. 282–296.
11. Lytvyn O.M., Nechuiviter O.P., Pershyna I.I., Mezhuyev V.I. Input Information in the Approximate Calculation of Two-Dimensional Integral from Highly Oscillating Functions (Irregular Case). Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. *XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information : proceedings. Kyiv.* 2019. P. 365–373. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_36
12. Nechuiviter O.P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2020. **4**. P. 65–73. https://doi.org/10.15588/1607-3274-2020-4-7
13. Нечуйвітер О.П., Іванов С.С., Ковальчук К.Г. Оптимальне інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального виду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* 2021. **33.** P. 68–72. https://doi.org/10.15407/fmmit2021.33.068

14. Nechuiviter O.P., Iarmosh O.V., Kovalchuk K.H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*. 2021. No. 1031 (1). 012059. https://doi.org/10.1088/1757-899X/1031/1/012059
15. Нечуйвітер О.П., Іванов С.С., Ковальчук К.Г. Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2022. № 1. С. 82–91. https://doi.org/10.20998/2222-0631.2022.01.10

Одержано 16.05.2025

Хурдей Євгенія Леонідівна,
старший викладач Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна,
https://orcid.org/0000-0001-8317-8194
yevheniia.khurdei@karazin.ua

Іванов Владислав Вікторович,
аспірант Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна.
https://orcid.org/0009-0003-5379-9370

UDC 519.644

Yevheniia Khurdei *, Vladyslav Ivanov

Cubature Formulas for Oscillatory Integrals with Given Function Traces on Lines

Education and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V.N. Karazin Kharkiv National University
* *Correspondence: yevheniia.khurdei@karazin.ua*

Introduction. Numerical integration of rapidly oscillating multivariable functions plays an important role in applied mathematics, particularly in image processing, computed tomography, and mathematical modeling. Traditional integration methods often prove inefficient in cases involving complex function structures and limited input data. Under such conditions, methods that utilize function traces on lines become especially relevant.

The purpose is to construct a cubature formula for the approximate evaluation of triple integrals of trigonometric functions defined on Hölder and Lipschitz classes using function traces on lines. To obtain corresponding approximation error estimates.

Results. An approach for constructing cubature formulas for approximate evaluation of triple integrals of trigonometric functions is developed, based on the use of function traces on lines and the information operators of O.M. Lytvyn. Error estimates of the numerical integration formula are proved for Hölder and Lipschitz function classes.

Conclusions. The proposed method enables approximate computation of triple trigonometric integrals based on given function values along lines. The results can be applied in numerical analysis and mathematical modeling problems requiring integration of rapidly oscillating functions of general form.

Keywords: numerical integration of multivariable functions, rapidly oscillating multivariable functions, cubature formulas, digital image processing.