КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.85 DOI:10.34229/2707-451X.26.1.1

М.Д. ЄГЕР, О.В. ЛЕФТЕРОВ

ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ МАРШРУТІВ НА ПРИКЛАДІ "ВИННОГО ШЛЯХУ" ВІДЕНЬ – ВЕНЕЦІЯ

Наведено змістовну постановку задачі побудови спеціалізованого маршруту з відвідуванням виноробень уздовж шляху Відень – Венеція. Запропоновані математичні моделі для шляхів з мінімальним часом, максимальним рейтингом або з найбільшою кількістю відгуків. Описано тестовий приклад. Наведено результати обчислювальних експериментів та визначені подальші кроки дослідження.

Ключові слова: *задача комівояжера, k-вершинний цикл, обмеження Міллера – Такера – Земліна, метод послідовних уступок, спеціалізовані маршрути, винні шляхи.*

Вступ. Тематичний туризм став важливим економічним фактором регіонального розвитку, роблячи значний внесок у місцеві громади та сільську економіку. Швидке зростання сектору тематичного туризму підкреслює його значну економічну та соціальну важливість. Розглянемо задачу побудови спеціалізованого маршруту на прикладі «винного шляху» Відень – Венеція. Формалізовані структури, такі як «винні шляхи», виступають стратегічним механізмом формування та зміцнення репутації регіону щодо якості, функціонуючи як форма колективних дій для просування як продуктів, так і територій [1]. Дві з трьох виноробень повідомляють, що винний туризм є дуже популярний і забезпечує близько чверті їхнього загального доходу. Таким чином, оптимізація винних шляхів не лише питання зручності для туристів, а й стратегічний напрямок підвищення регіональної конкурентоспроможності та економічної стійкості.

Для розв'язування таких задач як математична модель може використовуватись задача комівояжера (англ. Traveling Salesman Problem, TSP) [2 – 6], задача маршрутизації транспортних засобів з часовими вікнами (англ. Vehicle Routing Problem with Time Windows, VRPTW) для розв'язування задачі для туристичної компанії [7, 8], але частіше ця проблема еволюціонує в окремий підклас задач, що називаються задачами проєктування туристичної поїздки (англ. Tourist Trip Design Problem, TTDP), що розширюють принципи задачі орієнтування (англ. Orienteering Problem, OP) та VRP спеціально для сфери туризму [9].

Математична модель представлена в [2, 3] та [4], описує задачу побудови спеціалізованого маршруту Львів – Вроцлав. Однак, задача побудови винного шляху Відень – Венеція має відмінний характер через специфіку маршруту, яка полягає у вигляді ділянок, та кількості точок обов'язкових для відвідування. Подібна задача розв'язується у [5]. В статті пропонується модель з обмеженнями Міллера – Такера – Земліна та використання методу послідовних уступок для багатокритеріальних маршрутів.

Особливості маршруту та постановка задачі. Винний маршрут від Відня до Венеції надає багатогранний досвід для поціновувачів вина: від елегантності австрійських білих вин до повноти італійського Amarone та свіжості Prosecco. Обираючи цей маршрут мандрівник може керуватися трьома стратегіями. Перша це використання платних автошляхів, друга – альтернативна подорож переважно регіональними дорогами без проїзду автобанами і тунелями, третя – поєднання платних і безкоштовних доріг.

Перша стратегія у базовому маршруті довжиною 600 – 620 км дозволяє мандрівнику подолати цю відстань за 6–7 годин за рахунок якості доріг (рис. 1). Тобто достатньо однієї доби щоб насолодитися величчю гострих вершин австрійських Альп, зелених долин і кришталево чистих озер та гостинністю винарень вздовж маршруту. Друга стратегія оптимізує витрати на переміщення по маршруту і дозволяє відвідати гурманам віддалені від головних шляхів більш екзотичні винарні. Довжина такого базового маршруту може сягати від 740 до 930 км і відповідно час на його проходження може зайняти декілька днів. Третю стратегію використовують туристичні фірми – винні туристичні маршрути пропонуються на 7–10 днів з базовою довжиною маршруту 670 – 740 км.

«Винний шлях» Відень – Венеція відзначається високим рівнем популярності серед туристів [10, 11]. Мандрівнику, який не користується послугами туристичних компаній необхідно відповісти на запитання: як отримати максимальне задоволення від подорожі та дегустацій при мінімальних витратах часу і коштів? Отже, розробка сервісу для розв’язання задачі прокладання оптимального маршруту для мандрівників відповідно до їхніх переваг є актуальна.

На «винному шляху» Відень – Венеція слід виділити три відрізки: Відень – Марібор, Марібор – Горіція, Горіція – Венеція. Кожен відрізок маршруту характеризується кущовим географічним розташуванням винарень, а саме: поряд з Віднем, Марібором і Горіцією. Кількість виноробень уздовж маршруту є незначною порівняно з їх кількістю у центрах, що сформували виноробні кущі. Виключення це тільки останній відрізок маршруту, де виноробні господарства мають розгалужену мережеву картину. Ця особливість створює умови неоднорідності у структурі маршруту. На двох відрізках маршруту довжина шляху, що з’єднує кущові міста, є значно більшою ніж відстань до виноробень, розташованих поблизу кущів. На відміну від попередніх ділянок маршруту на завершальному відрізку відстань до виноробень порівняна з довжиною цього відрізка маршруту, тобто на завершальному відрізку маршруту передбачено значну варіативність пересування від Горіції до Венеції з відвідуванням виноробень. Таку топологію маршруту треба буде враховувати при проведенні обчислень. До вхідних даних належать крім специфічної топології, яка представлена матрицею, що містить час і відстань від кожної до кожної винарні, ще кількість відгуків і шкалу рейтингів, які задані також для кожної винарні.

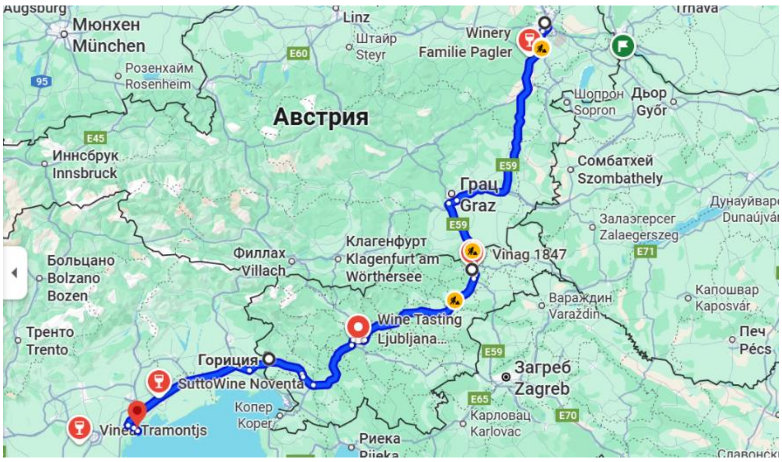


РИС. 1. Зображення базового маршруту Відень – Венеція

Задача полягає у побудові оптимального туристичного маршруту вздовж винного шляху який складається з трьох послідових ділянок шляху (Відень – Марібор, Марібор – Горіція, Горіція – Венеція), на кожній ділянці маршруту необхідно відвідати рівно k винарень. Маршрут повинен бути побудований таким чином, щоб: загальний час проходження маршруту був мінімальний; відвідувані винарні мали максимальний рейтинг або найбільшу кількість відгуків.

Математична модель мінімального за часом маршруту. Модель вперше запропонована в [6]. Задамо вектор Q_k таким чином, що $\sum\limits_{k\in 1..3} Q_k = n+2$, де n – загальна кількість пунктів для відвідування (міста та винарні). Вектор Q_k визначає кількість міст і винарень на кожній k-й ділянці маршруту. Важливо зазначити, що кожна ділянка маршруту, починаючи з другої, перетинається з попередньою ділянкою маршруту в одній вершині, при цьому ця вершина є останньою вершиною для ділянки $k-1$ та першою вершиною для ділянки k. У розглянутій задачі такими вершинами є міста Марібор та Горіція.

Далі задамо вектор K_k таким чином, щоб кожен його елемент визначав кількість вершин на k-й ділянці, через які обов'язково має проходити маршрут кожної ділянки. Очевидно, що початкова і кінцева вершини обов'язково включаються до цього числа.

Позначимо t_{ijk} – час подорожі з точки i до точки j на k-й ділянці, T_{ik} – мінімальний час перебування у вершині i k-ї ділянки.

Параметри для сформульованої задачі наведено у табл. 1.

ТАБЛИЦЯ 1. Параметри задачі

Параметр	Значення
Q_k	Кількість вершин на k-й ділянці
K_k	Необхідна для відвідування кількість вершин на k-й ділянці
t_{ijk}	Час подорожі з ***i***-ї вершини в ***j***-ту на k-тій ділянці шляху
T_{ik}	Мінімальний час проведений у ***i***-й вершині k-ї ділянки

Введемо такі змінні та їхні позначення:

- $x_{ijk} = 0 \vee 1;\ k=1,2,3;\ i,j=1..Q_k,\ i\neq j$ – булеві змінні, кожна з яких дорівнює одиниці, якщо маршрут проходить від i-го пункту в j-й на k-й ділянці, і нулю – в іншому випадку;
- $y_{ik} = 0 \vee 1;\ k=1,2,3;\ i=1..Q_k;$ – булеві змінні, кожна з яких дорівнює одиниці, якщо i-та вершина на k-й ділянці була відвідана маршрутом, і нулю – інакше;
- $u_{ik}\in Z,\ 1\le u_{ik}\le K_k;\ k=1,2,3;\ i=2..Q_k$ – цілочислові змінні, що використовуються в обмеженнях Міллера – Такера – Земліна, що набувають значень від 1 до K_k і позначають крок, на якому маршрут проходить через відповідну вершину i.

Оптимізаційну задачу мінімізації часу проходження маршруту та відвідування винарень запишемо у такому вигляді:

$$t_{\min} = \min \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{Q_k}\sum_{j=1,i\neq j}^{Q_k} t_{ijk}\cdot x_{ijk} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{Q_k} T_{ik}\cdot y_{ik} \qquad (1)$$

за обмежень:

$$\sum_{j=2}^{Q_k} x_{1jk} = 1,\ \sum_{i=1,i\neq Q_k}^{Q_k} x_{iQ_k k} = 1,\quad \forall k=1,2,3, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{Q_k} x_{ijk} = y_{ik}, \ \sum_{j=1, i\neq j}^{Q_k} x_{jik} = y_{ik}, \ \forall k = 1,2,3; \ \forall i = 2..Q_{k-1}, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{Q_k} y_{ik} = K_k - 2, \ \forall k = 1,2,3, \tag{4}$$

$$u_{ik} - u_{jk} + K_k \cdot x_{ijk} \leq K_k - 1, \ \forall k = 1,2,3; \ \forall i, j = 2..Q_k, i \neq j, \tag{5}$$

$$x_{ijk} = 0 \vee 1; k = 1,2,3; \ i, j = 1..Q_k, i \neq j, \tag{6}$$

$$y_{ik} = 0 \vee 1; k = 1,2,3; \ i = 2..Q_{k-1}, \tag{7}$$

$$u_{ik} \in Z, \ 1 \leq u_{ik} \leq K_k; \ k = 1,2,3; \ i = 2..Q_k. \tag{8}$$

Мінімізація цільової функції (1) відповідає знаходженню маршруту з мінімальним часом проходження. Обмеження (2) задають умову, відповідно до якої маршрут обов’язково починається в першій та закінчується в останній точці k-ї ділянки. Обмеження (3) гарантують, що вершина y_{ik} дорівнює одиниці тоді і лише тоді, коли маршрут входить до i-ї вершини та виходить з неї на k-й ділянці. Обмеження (4) визначають умову, згідно з якою кількість вершин, через які проходить маршрут на k-й ділянці, дорівнює кількості обов’язкових для відвідування вершин ділянки, за винятком першої (початкової) та останньої (кінцевої). Обмеження (5) є обмеженнями Міллера – Такера – Земліна, які забезпечують зв’язність маршруту, тобто відсутність у ньому підциклів [12, 13].

Нехай $C = \sum_k K_k$ – ціле число, таке що $1 \leq C \leq n-1$. Тоді обмеження (2) – (8) є необхідними та достатніми для опису всіх можливих маршрутів, які починаються у першій точці першої ділянки та закінчуються в останній точці третьої ділянки, містять C вершин і проходять рівно K_k вершин на кожній k-й ділянці маршруту.

Задача (1) – (8) належить до класу задач змішаного цілочислового лінійного програмування (Mixed-Integer Linear Programming, MILP). Вона містить $N_1 = \sum_{k=1,2,3} Q_k^2 + \sum_{k=1,2,3} Q_k$ змінних, з яких $\sum_{k=1,2,3} Q_k^2$ – булеві (змінні x та y), та $\sum_{k=1,2,3} Q_k$ цілочислових змінних. Задача містить $M_1 = 2 \cdot \sum_{k=1,2,3} (Q_k - 2) + 9 + \sum_{k=1,2,3} (Q_k - 1)^2 - \sum_{k=1,2,3} (Q_k - 1)$ лінійних обмежень, з яких $2 \cdot \sum_{k=1,2,3} (Q_k - 2) + 9$ – обмеження рівності і $\sum_{k=1,2,3} (Q_k - 1)^2 - \sum_{k=1,2,3} (Q_k - 1)$ – обмеження нерівності.

Слід зазначити, що задача у постановці (1) – (8) для трьох ділянок маршруту має сенс лише за умов $n \geq 4$, $Q_k \geq 2, \ \forall k = 1,2,3$ та $K_k \geq 2, \ \forall k = 1,2,3$. Це означає, що загальна кількість пунктів, через які може проходити маршрут, має бути не меншою за чотири. Кожна ділянка маршруту має містити щонайменше дві вершини – початкову і кінцеву. Кількість вершин обов’язкових для відвідування на кожній ділянці маршруту також не може бути меншою за дві, оскільки початок і кінець ділянки завжди є обов’язковими.

Математична модель маршруту з максимальним рейтингом або найбільшою кількістю відгуків. Позначимо R_{ik} – рейтинг i-ї вершини на k-й ділянці маршруту, який є дійсним числом у діапазоні від 1,0 … 5,0 з кроком дискретизації 0,1; F_{ik} – кількість відгуків для i-го пункту на k-й ділянці. Скористаємося методом послідовних уступок. Введемо параметр ε, який визначає величину допустимої уступки, на яку може бути збільшений t_{min} – мінімальний час подорожі на користь збільшення рейтингу або кількості відгуків.

Для цього додамо до обмежень (2) – (8) таке обмеження:

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{Q_k}\sum_{j=1,i\neq j}^{Q_k} t_{ijk}\cdot x_{ijk} + \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{Q_k} T_{ik}\cdot y_{ik} \le t_{\min} + \varepsilon. \tag{9}$$

Оптимізаційна задача максимізації сумарного рейтингу відвіданих пунктів має такий вигляд:

$$r_{\max} = \max\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{Q_k} R_{ik}\cdot y_{ik} \tag{10}$$

за обмежень (2) – (9).

Оптимізаційну задачу максимізації сумарної кількості відгуків відвіданих пунктів запишемо у вигляді:

$$f_{\max} = \max\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{Q_k} F_{ik}\cdot y_{ik} \tag{11}$$

за обмежень (2) – (9).

Задачі (10) та (11) належать до класу задач змішаного цілочислового лінійного програмування. Їх розв’язання здійснюється у два етапи: на першому етапі розв’язується задача (1) – (8), визначається мінімальний час t_{min}; на другому етапі розв’язується задача (10) або (11) для знайденого значення t_{min} та заданого параметра допустимої уступки ε.

Обчислювальні експерименти. Для тестування, вздовж маршруту Відень – Венеція з проходженням через міста Марібор та Горіція, обрано 23 винарні. До ділянки Відень – Марібор належать винарні з 2-ї по 10-ту (загальна кількість вершин – 11); до ділянки Марібор – Горіція – вершини з 11-ї по 19-ту (загальна кількість вершин – 9); до ділянки Горіція – Венеція – вершини з 19-ї по 27-му (кількість вершин – 9). Таким чином вектор $Q_k = \{11,\ 9,\ 9\}$. Вимагатимемо щоб маршрут проходив через одну винарню на кожній ділянці маршруту, тобто вектор $K_k = \{3,\ 3,\ 3\}$. Для кожної винарні задано її рейтинг та кількість відгуків. Мінімальний час перебування у винарні становить 60 хвилин. Основні параметри міст і винарень наведено у табл. 2.

ТАБЛИЦЯ 2. Обрані міста та винарні для тестового прикладу

№ п/п	№ ділянки	Назва вершини	Рейтинг	Кількість відгуків	Мінімальний час
1	2	3	4	5	6
1	1	Відень	–	–	–
2	1	Nigl	4.9	51	60
3	1	Weinbau Hummelberger	4.6	77	60
4	1	Weingut Sulzer-Boos	5	11	60
5	1	Weingut Geiszler	4.8	103	60
6	1	Wine Castle Family Thaller	4.9	302	60
7	1	Weingut Gollenz	4.9	59	60
8	1	Dveri Pax Jaringhof	4.8	228	60
9	1	Bogomir Valdhuber	4.9	24	60
10	1	VINOGRADI HORVAT - WINERY HORVAT	4.9	143	60
11	1, 2	Марібор	–	–	–
12	2	Lepa Vida winery	5	345	60
13	2	Vina Fornazarič / Fornazarič Wines	5	12	60
14	2	Simčič Bjanski Grič	5	35	60

Закінчення табл. 2

1	2	3	4	5	6
15	2	KRISTALVIN Winery	4.6	17	60
16	2	Draga Boutique Winery	4.9	30	60
17	2	Azienda agricola Villa Vasi	5	20	60
18	2	Princic Dario	4.8	32	60
19	2, 3	Горіція	–	–	–
20	3	Bessich Wines - One Family. Great Wines	4.9	95	60
21	3	Villa Bogdano 1880 - Organic Wines and Historic Vineyards	4.9	40	60
22	3	Miglio Rosso	4.8	150	60
23	3	Sfriso Winery	5	103	60
24	3	Winery Ornella Bellia	4.8	173	60
25	3	CANTINA LA FRASSINA	4.9	147	60
26	3	Pitars	4.8	276	60
27	3	Венеція	–	–	–

В табл. 2 вершини з номерами 1, 11, 19 та 27 відповідають пунктам початку та завершення маршруту, тобто містам.

Матриці t_{ijk} для кожної ділянки маршруту наведено в табл. 3. Нумерація винарень у таблиці здійснюється відповідно конкретної ділянки, а не згідно таблиці 2. Водночас збережено, відстежуваність номерів: зокрема винарня № 2 на ділянці Марібор – Горіція відповідає винарні з номером 13 з табл. 2.

ТАБЛИЦЯ 3. Часи подорожі між винарнями

	Матриця часів подорожі для ділянки Відень – Марібор										
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	33	35	34	33	114	155	307	306	310	1000
2	33	0	2	3	14	97	138	154	154	157	157
3	35	2	0	3	15	158	187	149	157	157	159
4	34	3	3	0	12	95	185	157	154	155	158
5	33	14	15	12	0	147	131	161	145	147	150
6	114	97	158	95	147	0	139	155	140	135	76
7	155	138	141	138	131	44	0	148	43	54	54
8	307	154	159	157	159	134	40	0	23	21	20
9	306	154	157	154	145	140	43	23	0	22	27
10	310	157	157	155	147	147	56	17	22	0	12
11	1000	157	159	158	150	76	54	20	27	12	0
	Матриця часів подорожі для ділянки Марібор – Горіція										
1	0	179	189	212	216	203	205	199	1000	–	–
2	179	0	12	33	38	26	26	23	170	–	–
3	189	12	0	29	34	19	20	16	178	–	–
4	212	33	29	0	10	16	18	19	167	–	–
5	216	38	34	10	0	21	22	23	19	–	–
6	203	26	19	16	21	0	12	8	13	–	–
7	205	26	20	18	22	12	0	7	21	–	–
8	199	23	16	19	23	8	7	0	26	–	–
9	1000	170	178	167	19	13	21	26	0	–	–
	Матриця часів подорожі для ділянки Горіція – Венеція										
1	0	68	58	75	60	51	63	65	1000	–	–
2	68	0	40	61	45	30	47	32	60	–	–

Закінчення табл. 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	58	40	0	30	21	13	24	42	51	–	–
4	75	62	30	0	27	39	25	64	44	–	–
5	60	45	21	27	0	24	28	50	42	–	–
6	51	30	13	39	24	0	28	31	55	–	–
7	63	47	24	25	28	28	0	51	59	–	–
8	65	32	42	64	50	31	51	0	74	–	–
9	1000	60	51	44	42	55	59	74	0	–	–

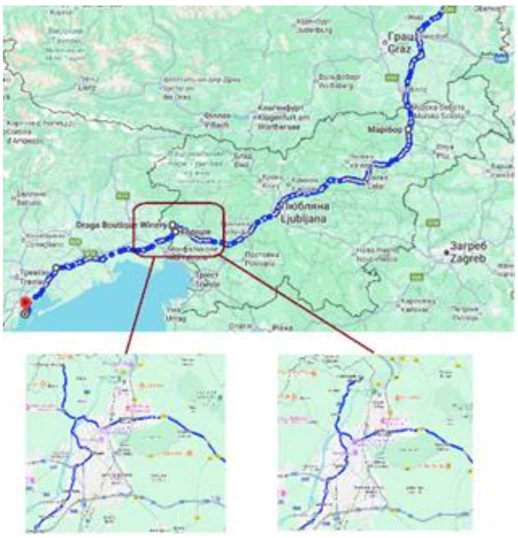
Варто зазначити, що в табл. 3 діагональні елементи матриць дорівнюють нулю та не використовуються в математичних моделях.

Математичні моделі (1) – (8), (10) та (11) були реалізовані з використанням мови математичного моделювання AMPL [14]. Розрахунки виконувалися на сервері NEOS [15] із застосуванням програми Gurobi версії 12.0.3 [16]. Були розраховані маршрути для різних значень параметру ε: 10, 50, 100, 200, 500. Результати розрахунків наведені у табл. 4.

ТАБЛИЦЯ 4. Результати розрахунку маршрутів для різних ε при знайденому $t_{min} = 681$

ε	Rmax	Troad	RPath	Fmax	Troad	FPath
10	14.9	690	1→4→11→16→19→23→27	435	688	1→6→11→16→19→23→27
50	15	700	1→4→11→17→19→23→27	608	725	1→6→11→16→19→26→27
100	15	700	1→4→11→17→19→23→27	610	734	1→6→11→18→19→26→27
200	15	700	1→4→11→17→19→23→27	923	858	1→6→11→12→19→26→27
500	15	700	1→4→11→17→19→23→27	923	858	1→6→11→12→19→26→27

З табл. 4 видно, що оптимальне значення R_{max} для маршруту Відень – Венеція було досягнуто вже при $\varepsilon = 50$, і для наступних (більших) значень ε отриманий маршрут не змінювався. Оптимальний маршрут та різниця між маршрутами за критерієм рейтингу наведено на рис. 2.



a *b*

РИС. 2. Оптимальний маршрут Відень – Венеція за критерієм максимального рейтингу: *a* – $\varepsilon = 10$; *b* – $\varepsilon = 50$

Оптимальне значення F_{max} для маршруту досягається при ε = 200, після чого маршрут також не змінюється для більших значень ε . Різниця маршрутів за критерієм максимальної кількості відгуків для різних ε показана на рис. 3.

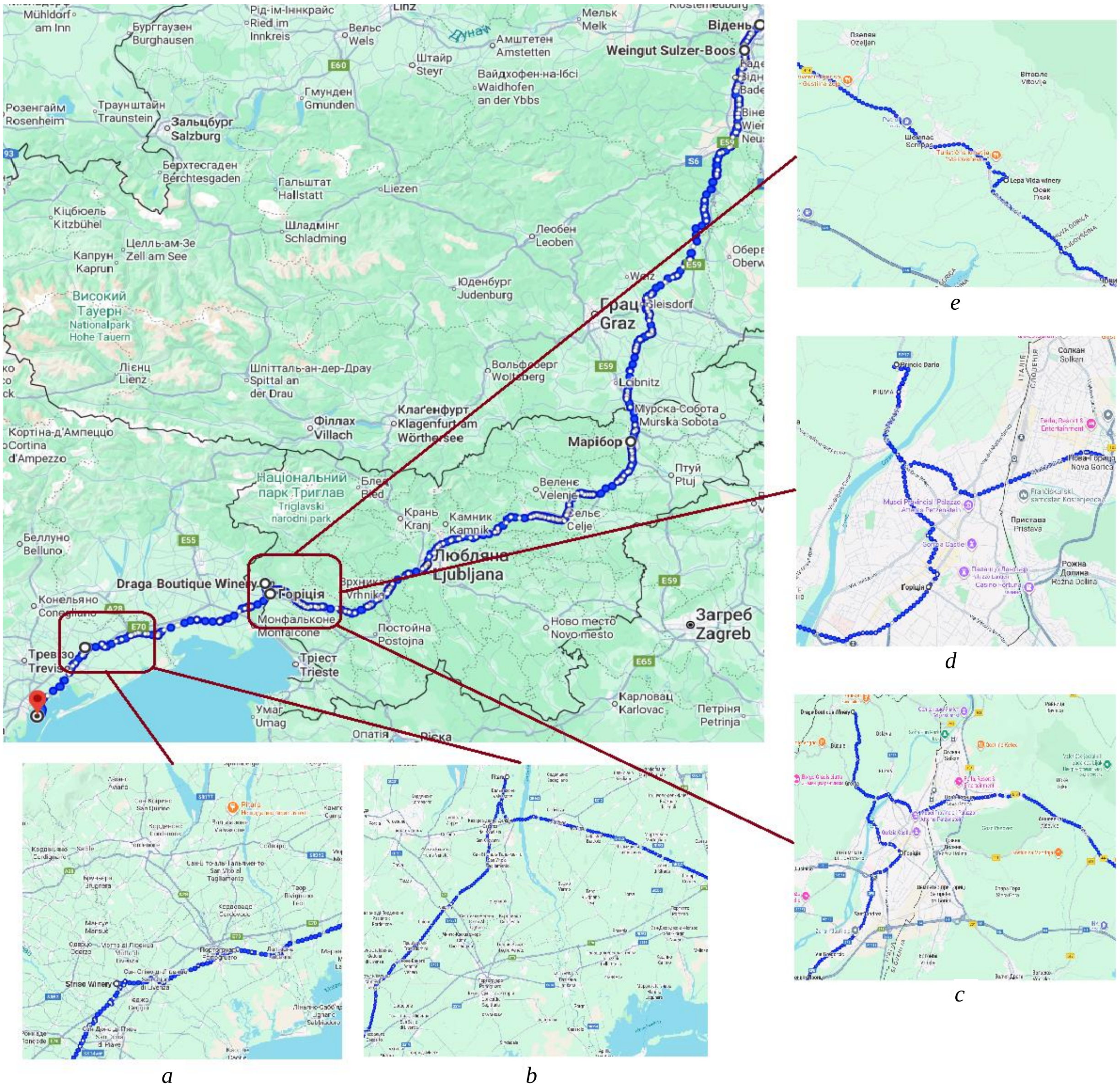


РИС. 3. Оптимальний маршрут Відень – Венеція для максимальної кількості відгуків. Ділянка Горіція – Венеція: *a* – ε =10; *b* – ε = 50; ділянка Марібор – Горіція: *c* – ε =10; *d* – ε =100; *e* – ε = 200

Як видно з рисунка, найчастіше маршрут змінюється на ділянках Марібор – Горіція та Горіція – Венеція. При цьому різниця у часі проходження між найшвидшим маршрутом і маршрутом з максимальною кількістю відгуків становить 170 хвилин, причому при збільшенні ε з 10 до 50 додаткові

37 хвилин часу забезпечили зростання кількості відгуків на 173. Збільшення ε з 50 до 100 призвело до зростання часу подорожі лише на 2 хвилини та збільшення кількості відгуків на 9. При збільшенні ε з 100 до 200 час подорожі зріс на 124 хвилини, водночас кількість відгуків зросла на 313.

Оскільки матриця часів подорожей між винарнями та містами є несиметричною, було розраховано зворотній маршрут Венеція – Відень із використанням запропонованої моделі для тих самих значень параметра ε . Результати розрахунків наведено у табл. 5. Як видно з таблиці, зворотні маршрути проходять через ті самі винарні, що й прямі маршрути, що пояснюється тим, що різниця між часами переміщення в прямому та зворотному не є значною і не впливає суттєво на структуру оптимальних маршрутів.

ТАБЛИЦЯ 5. Результати розрахунку зворотних маршрутів для різних ε при знайденому $t_{min} = 681$

ε	Rmax	Troad	RPath	Fmax	Troad	FPath
10	14.9	690	27→23→19→16→11→4→1	435	688	27→23→19→16→11→6→1
50	15	700	27→23→19→17→11→4→1	608	725	27→26→19→16→11→6→1
100	15	700	27→23→19→17→11→4→1	610	734	27→26→19→18→11→6→1
200	15	700	27→23→19→17→11→4→1	923	858	27→26→19→12→11→6→1
500	15	700	27→23→19→17→11→4→1	923	858	27→26→19→12→11→6→1

Результати обчислювальних експериментів підтвердили, що зміни в маршрутах, оптимізованих за критеріями рейтингу та кількості відгуків, локалізуються переважно на ділянках маршруту, які проходять через кущові міста.

Висновки. В статті наведено змістовну постановку задачі побудови «винного шляху» Відень – Венеція, який проходить через три ділянки: Відень – Марібор, Марібор – Горіція та Горіція – Венеція. Розроблено математичну модель маршруту мінімального часу, а також математичну модель на основі методу послідовних уступок для побудови маршрутів з максимальним рейтингом та з максимальною кількістю відгуків. Описано обчислювальні експерименти з використанням 23 винарень: 9 – на першій ділянці маршруту та по 7 – на другій і на третій ділянках.

В подальшому планується визначити всі оптимальні маршрути мінімального часу, максимального рейтингу та найбільшої кількості відгуків; розширити математичну модель обмеженнями, які дозволять урахувати якість вина та часові вікна (години роботи винарень); побудувати маршрути за допомогою штучного інтелекту (зокрема Gemini, Copilot, тощо) та порівняти їх з оптимальними розв'язками.

Авторські внески: Єгер М.Д. – розроблення математичних моделей та їх реалізація мовою AMPL; проведення обчислювальних експериментів на сервері NEOS; аналіз отриманих результатів. Лефтеров О.В. – розроблення змістовної постановки задачі; аналіз отриманих результатів; формування напрямків подальших досліджень.

Подяка. Автори висловлюють подяку науковому керівнику, завідувачу відділу Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України П.І. Стецюку за наукове керівництво та підтримку; О.І. Фєдосєєву – за консультації та допомогу; аспіранту Ужгородського національного університету С.Р. Тиводару – за допомогу та обговорення отриманих результатів.

References

1. Carràa G., Mariania M., Radić I., Peri I. Participatory strategy analysis: The case of wine tourism business. *Florence "Sustainability of Well-Being International Forum". 2015: Food for Sustainability and not just food, FlorenceSWIF2015*. 2015. P. 706–712. https://agritrop.cirad.fr/595758/1/595758.pdf, https://doi.org/10.1016/j.aaspro.2016.02.050
2. Stetsyuk P.I., Lefterov A.V., Fedosieiev A.I. The shortest *k*-node path. *Komp. Matematika*. 2015. 2. P. 3–11. (In Russian) https://nasplib.isofts.kiev.ua/items/62ff9bf9-6459-4065-af05-a8e5ec8e6d9a
3. Stetsyuk P.I., Lefterov A.V., Likhovid A.P., Fedosieiev A.I. Optimization service for choosing wine routes. *Mathematical modeling, optimization and information technologies: materials of the 5th Intern. scientific*. conf. 2016. **II**. P. 337–344. (In Russian) https://www.incyb.kiev.ua/storage/editor/files/s2lf-24-03-2016.pdf
4. Stetsyuk P., Solomon D., Grygorak M. Problems on Shortest k-Node Cycles and Paths. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2021. **3**. P. 15–33. (in Ukrainian) https://doi.org/10.34229/2707-451X.21.3.2
5. Stetsyuk P., Korablov M., Stoian O., Hubernator O., Mykhailenko O. A combined model for finding the shortest cycle to visit a given number of vertices from the graph clusters: an example of application for walking tourism. *International Scientific Technical Journal "Problems of Control and Informatics"*. 2024. **69** (4). P. 5–27. (In Ukrainian) https://doi.org/10.34229/1028-0979-2024-4-1
6. Yeher M.D., Lefterov O.V., Stetsyuk P.I., Fedosieiev O.I. Optimal wine route Viena – Venice. *Abstracts for XXIII International science and practical conference "Mathematical Support and Software For Intelligent Systems"*. 2025. http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2025/11/%D0%9C%D0%9F%D0%97%D0%86%D0%A1-2025.pdf (In Ukrainian)
7. Nasution S., Septiawan R., Fairuz A., Tourism itinerary recommendation using vehicle routing problem time windows and analytics hierarchy process. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*. 2024. **36**. P. 517–534. https://doi.org/10.11591/ijeecs.v36.i1.pp517-534
8. Anggodo Y., Ariyani A., Ardi M., Mahmudy W., Optimization of Multi-Trip Vehicle Routing Problem with Time Windows using Genetic Algorithm. *Journal of Environmental Engineering & Sustainable Technology*. 2016. **3**. P. 92–97. http://doi.org/10.21776/ub.jeest.2017.003.02.4
9. Shahbazi M., Tavakkoli-Moghaddam R., Vahedi-Nouri B. A Multi-Objective Tour Routing Problem Considering the Time Window and Tourist Utility. *Sharif Journal of Industrial Engineering & Management*, 2023. **38** (2). P. 99–108. https://doi.org/10.24200/j65.2022.57006.2179
10. Fäßler A.-M. Dem Weintourismus auf der Spur. München. Dissertation. *University Vienna*. 2008. https://doi.org/10.25365/thesis.2957 (In German)
11. Festa G., Shams R., Metallo G., Cuomo M.-T. Opportunities and challenges in the contribution of wine routes to wine tourism in Italy – A stakeholders' perspective of development. *Tourism Management Perspectives*. 2020. **33**. P. 100585. https://doi.org/10.1016/j.tmp.2019.100585
12. Miller C.E., Tucker A.W., Zemlin R.A. Integer programming formulation of travelling salesman problem. *J. ACM*. 1960. **3**. P. 326–329. https://doi.org/10.1145/321043.321046
13. Sawik T. A note on the Miller-Tucker-Zemlin model for the asymmetric traveling salesman problem. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences.* 2015. **64** (3). https://doi.org/10.1515/bpasts-2016-0057
14. AMPL. https://ampl.com/ (accessed: 06.10.2025)
15. NEOS Server. https://neos-server.org/neos (accessed: 06.10.2025)
16. Gurobi Solver. https://www.gurobi.com/ (accessed: 06.10.2025)

Received/Одержано 20.10.2025 Accepted/Прийнято 03.03.2026 Published/Надруковано 27.03.2026

Єгер Максим Дмитрович,
аспірант Ужгородського національного університету,
maksym.yeher@uzhnu.edu.ua

Лефтеров Олександр Володимирович,
науковий співробітник Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
lefterov.alexander@gmail.com

MSC 05C85, 90C11, 90C29

Maksym Yeher [1], Oleksandr Lefterov [2]

The Problem of Constructing Specialized Routes: a Case Study of the Vienna – Venice "Wine Route"

[1] *Uzhhorod National University, Ukraine*
[2] *V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv*
[*] *Correspondence: maksym.yeher@uzhnu.edu.ua*

"Wine routes" serve as one of the strategic mechanisms for shaping and strengthening regional reputation, acting as a form of collective action to promote both products and territories. Therefore, the problem of constructing optimal specialized routes for both tourists and travel agencies is highly relevant and serves as an illustrative application of optimization methods.

The purpose of this work is to develop a mathematical model for constructing a specialized route with the minimum travel time, as well as routes maximizing winery ratings or the number of reviews, and to validate the model's correctness through computational experiments.

The paper presents a substantive problem formulation for constructing specialized routes, using the Vienna–Venice "wine route" as a case study. The route is divided into three segments: Vienna – Maribor, Maribor – Gorizia, and Gorizia – Venice. The association between wineries and segments is defined (each winery belongs to a specific segment). For each segment, the number of wineries that must be visited is specified. Two mathematical models are proposed to solve the problem: a model for the minimum-time route, based on the *k*-vertex cycle search for the Traveling Salesman Problem (TSP) with Miller – Tucker – Zemlin constraints and a model based on the method of sequential concessions for routes with the maximum winery rating or the highest number of reviews. The proposed models were tested on an instance containing 23 wineries, with 11 belonging to the first segment and 7 to each of the second and third segments. For each segment, the number of mandatory wineries to visit is set to one. The results obtained confirm the correctness of the models and the potential for their further practical application.

Future work plans include identifying all optimal routes regarding minimum time, maximum rating, and the highest number of reviews; extending the mathematical model with constraints on wine quality and time windows (winery operating hours); constructing specialized routes using artificial intelligence (e.g., Gemini, Copilot, etc.) and comparing them with the mathematically optimal solutions.

Keywords: wine routes, traveling salesman problem, k-vertex cycle, Miller – Tucker – Zemlin constraint, method of successive concessions.