УДК 519.85 DOI:10.34229/2707-451X.26.2.2

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЛП-ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ПОТОКІВ В ЕЛЕКТРОМЕРЕЖІ

П.І. Стецюк [1], О.М. Хом'як [1 *], О.С. Давидов [2],

ORCIDs: 0000-0003-4036-2543, 0000-0002-5384-9070, 0000-0002-5115-0514

[1] *Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ*

[2] *Національний університет «Київський авіаційний інститут», Україна*

[*] *Листування: khomiak.olha@gmail.com*

UDC 519.85

On the Uniqueness of the Optimal Flow Distribution LP Solution in an Electrical Network

Petro Stetsyuk [1], Olha Khomiak [1 *], Oleksandr Davydov [2]

[1] *V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv*

[2] *National University "Kyiv Aviation Institute", Ukraine*

[*] *Correspondence: khomiak.olha@gmail.com*

In [1], a mathematical model for minimizing the power moment in an electrical network was developed, taking into account transmission line capacities, balance relations at the main network nodes, and load levels of energy nodes. The model is formulated as a mixed-integer linear programming problem, where the integer variables are binary and determine one of the possible directions of power transmission along the network lines.

This paper presents a mathematical model of the same problem in the form of a linear programming (LP) problem and shows that the optimal power flows along the network edges are transmitted in only one direction, as required for power transmission in electrical energy systems. An algorithm for verifying the uniqueness of the solution to the resulting LP problem is proposed and tested on a sample case. It is based on comparing the solutions of two quadratic programming problems with separable strictly convex quadratic objective functions, each of which has a unique solution.

The paper is organized as follows. In Section 1, the LP problem for flow distribution with respect to the minimum power moment in the electrical network is formulated. Section 2 investigates the properties of the LP problem related to power flow transmission in the network. Section 3 describes a quadratic programming problem and, based on it, justifies a criterion for determining the uniqueness of the LP solution. Section 4 presents the results of computational experiments for a model electrical network performed using the Gurobi solver.

The developed mathematical model can be used for balancing regional power systems under conditions of de-energization of main nodes by setting the corresponding node power values to zero. The proposed approach can also be applied to modeling a wide class of network systems, such as flow control problems in energy, transportation, and logistics networks.

Keywords: electric power system, power moment, linear programming problem, quadratic programming problem, Gurobi, AMPL.

Анотація

У статті [1] розроблена математична модель мінімізації моменту потужності електромережі з урахуванням пропускної здатності ліній електропередач, балансових співвідношень у магістральних вузлах мережі та рівнів навантажень енергетичних вузлів. Математична модель представлена задачею цілочислового лінійного програмування, де цілочислові змінні є булевими та задають один із напрямів передачі потужностей по лініях електропередач у мережі.

У цій статті представлено математичну модель цієї ж проблеми у формі задачі лінійного програмування (ЛП-задачі) та показано, що оптимальні потоки потужностей по ребрах мережі пересилаються тільки в одному напрямі, як і потрібно для передачі електроенергії в електроенергетичних мережах. Запропоновано та перевірено на тестовому прикладі алгоритм для встановлення єдиності розв'язку отриманої задачі лінійного програмування. Він базується на порівнянні розв`язків двох задач квадратичного програмування з сепарабельними строго опуклими квадратичними функціями, кожна з яких має єдиний розв'язок.

Матеріал статті викладено у такій послідовності. У першому розділі сформульовано ЛП-задачу для розподілу потоків за мінімальним моментом потужності в електромережі. У другому розділі досліджено властивості ЛП-задачі щодо пересилання потоків потужності в мережі. У третьому розділі описана задача квадратичного програмування та за її допомогою обґрунтоване правило визначення єдиності розв'язку ЛП-задачі. У четвертому розділі для модельної електромережі наведено результати обчислювальних експериментів, виконаних із використанням солвера Gurobi.

Розроблена математична модель може бути використана для балансування регіональних енергосистем за умов знеструмлення магістральних вузлів, для чого достатньо відповідні потужності магістральних вузлів вважати нульовими. Запропонований підхід може бути застосований для моделювання широкого класу мережевих систем, наприклад, задач керування потоками в енергетичних, транспортних та логістичних мережах.

Ключові слова: електроенергетична система, момент потужності, задача лінійного програмування, задача квадратичного програмування, Gurobi, AMPL.

Вступ. У статті [1] представлено математичну модель мінімізації моменту потужності електромережі з урахуванням пропускної здатності ліній електропередач, балансових співвідношень у магістральних вузлах мережі та рівнів навантажень енергетичних вузлів. Математичну модель представлено задачею цілочислового лінійного програмування, де цілочислові змінні є булевими та задають один із напрямів передачі потужностей лініями електропередач у мережі.

В статті представимо математичну модель цієї ж проблеми у формі задачі лінійного програмування (ЛП-задачі) та покажемо, що оптимальні потоки потужностей по ребрах мережі пересилаються лише в одному напрямі, як і потрібно для передачі електроенергії в електроенергетичних мережах. Ця властивість ЛП-задачі буде сформульована у твердженні 1.

Центральним результатом роботи є алгоритм для отримання умови єдиності розв'язку ЛП-задачі. Запропонований підхід базується на розв`язанні двох задач квадратичного програмування із сепарабельними строго опуклими квадратичними функціями, які відрізняються значеннями вагових коефіцієнтів цільових функцій. Обидві задачі квадратичного програмування мають єдині розв'язки (твердження 2). У випадку їх збігу отримується достатня умова єдиності розв'язку ЛП-задачі.

Матеріал статті викладено у такій послідовності. У першому розділі сформульовано ЛП-задачу для розподілу потоків за мінімальним моментом потужності в електромережі. У другому розділі досліджено властивості ЛП-задачі щодо передачі потоків потужності в мережі. У третьому розділі описано задачу квадратичного програмування та обґрунтовано за її допомогою правило визначення єдиності розв'язку ЛП-задачі. У четвертому розділі наведено результати обчислювальних експериментів для двох тестових прикладів із роботи [1], виконаних із використанням солвера Gurobi [2].

1. Формулювання ЛП-задачі. Нехай A – множина магістральних вузлів, B – множина вузлів навантажень, n_A – кількість магістральних вузлів, n_B – кількість вузлів навантажень.

Для кожного магістрального вузла $i \in A$ задано наявний обсяг потужності a_i. Для кожного вузла навантаження $j \in B$ задано необхідний попит на потужність b_j. Вважаємо, що обсяги потужностей є цілими числами та задовольняють нерівності

$$\sum_{i \in A} a_i \le \sum_{j \in B} b_j \ . \tag{1}$$

Нехай $E_{AA} \subset A \times A$ – множина ребер, яка задає зв'язки між магістральними вузлами, а $E_{AB} \subset A \times B$ – множина ребер, яка задає зв'язки між магістральними вузлами та вузлами навантаження, m_{AA} – кількість ребер E_{AA}, m_{AB} – кількість ребер E_{AB}.

Для кожного ребра ij задано вартість пересилання одиниці потоку: $d_{ij}^{AA} = d_{ji}^{AA}, ij \in E_{AA}$ та $d_{ij}^{AB} = d_{ji}^{AB}, ij \in E_{AB}$, а також верхні межі $x_{ij}^{up} = x_{ji}^{up}, ij \in E_{AA}$ та $y_{ij}^{up} = y_{ji}^{up}, ij \in E_{AB}$ для потоків потужності, які можна передавати дугами ij або ji. Будемо вважати, що вартості пересилання потоків та верхні межі на них задані цілими числами.

Задача полягає у знаходженні мінімального моменту потужності (сумарної вартості пересилання потоків у мережі) за умов дотримання верхніх обмежень на обсяги потоків, повного використання обсягів потужності магістральних вузлів та максимального забезпечення необхідних потреб вузлів навантаження.

Нехай змінні $x_{ij}^{+} \geq 0, x_{ij}^{-} \geq 0,\ i, j \in A, ij \in E_{AA}$ – невідомі обсяги потоків між магістральними вузлами, а змінні $y_{ij}^{+} \geq 0, y_{ij}^{-} \geq 0,\ i \in A, j \in B, ij \in E_{AB}$ – невідомі обсяги потоків між магістральними вузлами та вузлами навантаження. Знаки "+" та "–" позначають напрям потоку від вузла i до вузла j та у зворотному напрямку.

Нехай $x = \{x_{ij}^{+}, x_{ij}^{-}\}_{ij \in E_{AA}}$, $y = \{y_{ij}^{+}, y_{ij}^{-}\}_{ij \in E_{AB}}$. Тоді задача знаходження мінімального моменту потужності в електромережі формулюється як ЛП-задача: знайти

$$F^* = F(x^*, y^*) = \min_{x,y} \left\{ F(x,y) = \sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA}(x_{ij}^{+} + x_{ij}^{-}) + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB}(y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-}) \right\} \tag{2}$$

за обмежень

$$\sum_{j:ij \in E_{AA}} \left(x_{ij}^{+} - x_{ij}^{-}\right) - \sum_{j:ji \in E_{AA}} \left(x_{ji}^{+} - x_{ji}^{-}\right) + \sum_{j:ij \in E_{AB}} \left(y_{ij}^{+} - y_{ij}^{-}\right) = a_i, \forall i \in A, \tag{3}$$

$$\sum_{i:ij \in E_{AB}} \left(y_{ij}^{+} - y_{ij}^{-}\right) \leq b_j, \forall j \in B, \tag{4}$$

$$0 \leq x_{ij}^{+} \leq x_{ij}^{up}, \quad 0 \leq x_{ij}^{-} \leq x_{ij}^{up}, \quad i, j \in A, ij \in E_{AA}, \tag{5}$$

$$0 \leq y_{ij}^{+} \leq y_{ij}^{up}, \quad 0 \leq y_{ij}^{-} \leq y_{ij}^{up}, \quad i \in A, j \in B, ij \in E_{AB}. \tag{6}$$

Задача (2) – (6) є задачею лінійного програмування. Кількість змінних дорівнює $n = 2(m_{AA} + m_{AB})$, а кількість обмежень, не враховуючи обмежень на невід'ємність потокових змінних, дорівнює $m = n_A + n_B + 2(m_{AA} + m_{AB})$.

Цільова функція $F(x, y)$, визначена за формулою (2), задає момент потужності, тобто сумарну вартість пересилання потоків потужності у мережі. Мінімальний момент потужності $F^* = F(x^*, y^*)$ реалізується на оптимальному розподілі потоків (x^*, y^*).

Лінійні рівності (3) означають, що кожен із магістральних вузлів повинен переслати споживачам увесь обсяг потужності. Лінійні нерівності (4) означають, що кожен із вузлів навантаження може недоотримати необхідний обсяг потужності.

Обмеження (5) означають, що ненульові потоки потужностей пересилаються по ребрах E_{AA}, не порушуючи при цьому верхніх меж на обсяги потоків. Обмеження (6) задають аналогічні умови для ребер множини E_{AB}.

2. Властивість ЛП-задачі. Нехай (x^*, y^*) – розв'язок задачі (2) – (6). Має місце таке твердження.

Твердження 1. Для $x^* = \{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AA}}$ та $y^* = \{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AB}}$ справедлива рівність

$$\sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA} \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\} + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB} \min\{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\} = 0 . \quad (7)$$

Рівність (7) гарантує, що оптимальні потоки потужностей передаються лише в одному напрямі вздовж кожного ребра множин E_{AA} та E_{AB}.

Доведення. Нехай $\tilde{x}^* = \{(\tilde{x}_{ij}^+)^*, (\tilde{x}_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AA}}$ та $\tilde{y}^* = \{(\tilde{y}_{ij}^+)^*, (\tilde{y}_{ij}^-)^*\}_{ij \in E_{AB}}$ такі, що

$$(\tilde{x}_{ij}^+)^* = (x_{ij}^+)^* - \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\}, \; (\tilde{x}_{ij}^-)^* = (x_{ij}^-)^* - \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\}, \; ij \in E_{AA} , \quad (8)$$

$$(\tilde{y}_{ij}^+)^* = (y_{ij}^+)^* - \min\{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\}, \; (y_{ij}^-)^* = (y_{ij}^-)^* - \min\{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\}, \; ij \in E_{AB} . \quad (9)$$

Покажемо, що $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ задовольняють обмеження (3) – (6).

Враховуючи, що для будь-якого $ij \in E_{AA}$ виконуються такі рівності:

$$(\tilde{x}_{ij}^+)^* - (\tilde{x}_{ij}^-)^* = (x_{ij}^+)^* - \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\} - (x_{ij}^-)^* + \min\{(x_{ij}^+)^*, (x_{ij}^-)^*\} = (x_{ij}^+)^* - (x_{ij}^-)^* ,$$

а x^* задовольняє обмеження (3), тобто

$$\sum_{j:ij \in E_{AA}} \left((x_{ij}^+)^* - (x_{ij}^-)^*\right) - \sum_{j:ji \in E_{AA}} \left((x_{ji}^+)^* - (x_{ji}^-)^*\right) + \sum_{j:ij \in E_{AB}} \left((y_{ij}^+)^* - (y_{ij}^-)^*\right) = z_i^*, \forall i \in A,$$

отримуємо, що $\tilde{x}^*$ також задовольняє обмеження (3), тобто

$$\sum_{j:ij \in E_{AA}} \left((\tilde{x}_{ij}^+)^* - (\tilde{x}_{ij}^-)^*\right) - \sum_{j:ji \in E_{AA}} \left((\tilde{x}_{ji}^+)^* - (\tilde{x}_{ji}^-)^*\right) + \sum_{j:ij \in E_{AB}} \left((\tilde{y}_{ij}^+)^* - (\tilde{y}_{ij}^-)^*\right) = \tilde{z}_i^*, \forall i \in A .$$

Враховуючи, що для будь-якого $ij \in E_{AB}$ справедливі рівності

$$(\tilde{y}_{ij}^+)^* - (\tilde{y}_{ij}^-)^* = (y_{ij}^+)^* - \min\{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\} - (y_{ij}^-)^* + \min\{(y_{ij}^+)^*, (y_{ij}^-)^*\} = (y_{ij}^+)^* - (y_{ij}^-)^* ,$$

а y^* задовольняє обмеження (4), тобто

$$\sum_{i:ij \in E_{AB}} \left((y_{ij}^+)^* - (y_{ij}^-)^*\right) \le b_j, \forall j \in B,$$

отримуємо, що $\tilde{y}^*$ також задовольняє обмеження (4) , тобто

$$\sum_{i:ij \in E_{AB}} \left((\tilde{y}_{ij}^+)^* - (\tilde{y}_{ij}^-)^*\right) \le b_j, \forall j \in B.$$

Враховуючи, що із формули (8) маємо, що для будь-якого $ij \in E_{AA}$ $(\tilde{x}_{ij}^+)^* \ge 0$, $(\tilde{x}_{ij}^-)^* \ge 0$, $(\tilde{x}_{ij}^+)^* \le (x_{ij}^+)^*$, $(\tilde{x}_{ij}^-)^* \le (x_{ij}^-)^*$, а із формули (9) маємо, що для будь-якого $ij \in E_{AB}$ $(\tilde{y}_{ij}^+)^* \ge 0$, $(y_{ij}^-)^* \ge 0$, $(\tilde{y}_{ij}^+)^* \le (y_{ij}^+)^*$, $(\tilde{y}_{ij}^-)^* \le (y_{ij}^-)^*$, то $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ задовольняють обмеження (5) та (6), що випливає з таких співвідношень:

$$0 \le (\tilde{x}_{ij}^+)^* \le (x_{ij}^+)^* \le x_{ij}^{up}, \quad 0 \le (\tilde{x}_{ij}^-)^* \le (x_{ij}^-)^* \le x_{ij}^{up}, \; i, j \in A, ij \in E_{AA} ,$$

$$0 \le (\tilde{y}_{ij}^+)^* \le (y_{ij}^+)^* \le y_{ij}^{up}, \quad 0 \le (\tilde{y}_{ij}^-)^* \le (y_{ij}^-)^* \le y_{ij}^{up}, \; i \in A, j \in B, ij \in E_{AB} .$$

Оптимальне значення цільової функції у (2) визначається за формулою

$$F^* = \sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA}((x_{ij}^+)^* + (x_{ij}^-)^*) + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB}((y_{ij}^+)^* + (y_{ij}^-)^*) , \quad (10)$$

а значення цільової функції для $\tilde{x}^*$ та $\tilde{y}^*$ визначається за формулою

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^* &= \sum_{ij\in E_{AA}} d_{ij}^{AA}((\tilde{x}_{ij}^+)^* + (\tilde{x}_{ij}^-)^* + \sum_{ij\in E_{AB}} d_{ij}^{AB}((\tilde{y}_{ij}^+)^* + (\tilde{y}_{ij}^-)^*) = \\
&= \sum_{ij\in E_{AA}} d_{ij}^{AA}((x_{ij}^+)^* + (x_{ij}^-)^* - 2\min\{(x_{ij}^+)^*,(x_{ij}^-)^*\}) + \\
&+ \sum_{ij\in E_{AB}} d_{ij}^{AB}((y_{ij}^+)^* + (y_{ij}^-)^* - 2\min\{(x_{ij}^+)^*,(x_{ij}^-)^*\}) = \\
&= \sum_{ij\in E_{AA}} d_{ij}^{AA}((x_{ij}^+)^* + (x_{ij}^-)^*) + \sum_{ij\in E_{AB}} d_{ij}^{AB}((y_{ij}^+)^* + (y_{ij}^-)^*) - \\
&-2\left(\sum_{ij\in E_{AA}} d_{ij}^{AA}\min\{(x_{ij}^+)^*,(x_{ij}^-)^*\} + \sum_{ij\in E_{AB}} d_{ij}^{AB}\min\{(y_{ij}^+)^*,(y_{ij}^-)^*\}\right) = \\
&= F^* - 2\left(\sum_{ij\in E_{AA}} d_{ij}^{AA}\min\{(x_{ij}^+)^*,(x_{ij}^-)^*\} + \sum_{ij\in E_{AB}} d_{ij}^{AB}\min\{(y_{ij}^+)^*,(y_{ij}^-)^*\}\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Враховуючи, що ліва частина рівності (7) є невід'ємною, з формул (10) та (11) отримуємо, що рівність (5) є справедливою, оскільки приходимо до протиріччя, що ($\tilde{x}^*, \tilde{y}^*$) є розв'язком задачі (2) – (6) з меншим значенням цільової функції, ніж розв'язок (x^*, y^*).

Твердження 1 доведено □.

Твердження 1 гарантує, що оптимальні потоки по ребрах E_{AA} та E_{AB} передаються лише в одному напрямі, що узгоджується з фізичною природою передачі електроенергії в електроенергетичних мережах.

3. Про єдиність розв'язку ЛП-задачі. Єдиність розв'язку ЛП-задачі (2)–(6) можна встановити за класичною схемою з використанням оцінок оптимальної симплекс-таблиці [3]. Для задачі мінімізації розв'язок є єдиним, якщо для всіх небазисних змінних оцінки є додатніми. Однак цей підхід залежить від вибраного солвера для розв`язання ЛП-задач [4, 5] і для задачі (2)–(6) може бути непридатним, оскільки обмеження (5) – (6) є двосторонніми і в різних реалізаціях симплекс-методу можуть враховуватися спеціальним чином.

Далі наведемо підхід, що буде використовувати розв'язання двох задач квадратичного програмування, і може бути застосований для довільних солверів, які розв'язують як ЛП-задачу, так і задачу квадратичного програмування.

Розглянемо задачу квадратичного програмування: знайти

$$Q^* = Q(x^*, y^*) = \min_{x,y}\left\{Q(x,y) = \sum_{ij\in E_{AA}} u_{ij}((x_{ij}^+)^2 + (x_{ij}^-)^2) + \sum_{ij\in E_{AB}} v_{ij}((y_{ij}^+)^2 + (y_{ij}^-)^2)\right\} \tag{12}$$

за обмежень

$$\sum_{ij\in E_{AA}} d_{ij}^{AA}(x_{ij}^+ + x_{ij}^-) + \sum_{ij\in E_{AB}} d_{ij}^{AB}(y_{ij}^+ + y_{ij}^-) = F^*, \tag{13}$$

$$\sum_{j:ij\in E_{AA}} \left(x_{ij}^+ - x_{ij}^-\right) - \sum_{j:ji\in E_{AA}} \left(x_{ji}^+ - x_{ji}^-\right) + \sum_{j:ij\in E_{AB}} \left(y_{ij}^+ - y_{ij}^-\right) = a_i^0,\ \forall i\in A, \tag{14}$$

$$\sum_{i:ij\in E_{AB}} \left(y_{ij}^+ - y_{ij}^-\right) \le b_j,\ \forall j\in B, \tag{15}$$

$$0 \le x_{ij}^+ \le x_{ij}^{up},\ 0 \le x_{ij}^- \le x_{ij}^{up},\ \ i,j\in A,\ ij\in E_{AA}, \tag{16}$$

$$0 \le y_{ij}^+ \le y_{ij}^{up},\ 0 \le y_{ij}^- \le y_{ij}^{up},\ \ i\in A,\ j\in B,\ ij\in E_{AB}, \tag{17}$$

де вагові коефіцієнти $u_{ij} \ge 0$ для всіх $ij\in E_{AA}$ і $v_{ij} \ge 0$ для всіх $ij\in E_{AB}$.

Задача квадратичного програмування (12)–(17) включає обмеження ЛП-задачі (2) – (6) та обмеження (13), яке фіксує оптимальне значення цільової функції ЛП-задачі. Для неї справедливе таке твердження.

Твердження 2. Якщо $u_{ij} > 0$ для всіх $ij \in E_{AA}$ і $v_{ij} > 0$ для всіх $ij \in E_{AB}$, то задача (12)–(17) має єдиний розв'язок (x^*, y^*).

Доведення. Скористаємося методом доведення від супротивного. Нехай (x^*, y^*) та (x^{**}, y^{**}) – два неспівпадаючі розв'язки задачі (12)–(17). Їм відповідає однакове оптимальне значення цільової функції:

$$Q^* = Q(x^*, y^*) = Q(x^{**}, y^{**}).$$

Оскільки обидва розв'язки задовольняють лінійним обмеженням (13)–(17), то цим обмеженням задовольняє їх опукла комбінація:

$$(x^{***}, y^{***}) = \lambda(x^*, y^*) + (1-\lambda)(x^{**}, y^{**}), \text{ де } 0 < \lambda < 1.$$

Якщо $u_{ij} > 0$ для всіх $ij \in E_{AA}$ і $v_{ij} > 0$ для всіх $ij \in E_{AB}$, то функція $Q(x, y)$ є строго опуклою, тобто для $(x, y) \neq (\tilde{x}, \tilde{y})$ справедлива нерівність:

$$Q(\lambda(x, y) + (1-\lambda)(\tilde{x}, \tilde{y})) < \lambda Q(x, y) + (1-\lambda)Q(\tilde{x}, \tilde{y}), \tag{18}$$

де $0 < \lambda < 1$. Враховуючи (18), для $Q(x^{***}, y^{***})$ – значення цільової функції в точці (x^{***}, y^{***}) справедливі наступні співвідношення:

$$Q(x^{***}, y^{***}) = Q(\lambda(x^*, y^*) + (1-\lambda)(x^{**}, y^{**})) < \lambda Q(x^*, y^*) + (1-\lambda)Q(x^{**}, y^{**}) = \lambda Q^* + (1-\lambda)Q^* = Q^*,$$

з яких випливає нерівність $Q(x^{***}, y^{***}) < Q^*$. Вона суперечить тому, що (x^*, y^*) та (x^{**}, y^{**}) розв'язки задачі (12)–(17), так як в точці (x^{***}, y^{***}), яка задовольняє обмеженням (13)–(17), значення цільової функції $Q(x^{***}, y^{***})$ є меншим за мінімальне значення Q^*. Твердження 2 доведено. □.

Із твердження 2 випливає, що якщо розв'язки задачі (12)–(17) при різних значеннях невід'ємних вагових коефіцієнтів будуть збігатися, то це служить гарантією того, що ЛП-задача (2)–(6) має єдиний розв'язок.

4. Обчислювальний експеримент. Розглянуто тестовий приклад модельної електроенергетичної мережі з [1], параметри якої наведено у табл. 1. Тут задано відповідні потужності магістральних вузлів A_i, $i = 1, \ldots, 5$, попит у вузлах навантаження B_i, $i = 1, \ldots, 10$, а також відповідні довжини ліній електропередачі між вузлами. Для магістральних ліній електропередачі верхні межі пропускної здатності встановлено на рівні 800 МВА (мегавольт-ампер – одиниця повної електричної потужності), а для ліній, що з'єднують магістральні вузли з вузлами навантаження, –180 МВА.

ТАБЛИЦЯ 1. Параметри тестової задачі (5 магістральних вузлів, 10 вузлів навантажень)

Позначення вузла	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5					
Потужність, МВА	800	700	650	500	450					
Позначення вузла	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
Потужність, МВА	250	630	400	250	160	160	250	250	500	250
ЛЕП між вузлами	A_1A_2	A_2A_3	A_3A_4	A_4A_5	A_5A_1	A_1B_1	A_1B_2	A_1B_3	A_1B_4	A_1B_5
d_{ij}^{AA}	35	70	50	25	65	13	7	9	15	20
ЛЕП між вузлами	A_2B_2	A_2B_3	A_2B_5	A_2B_8	A_2B_9	A_3B_2	A_3B_5	A_3B_6	A_3B_9	A_3B_{10}
d_{ij}^{AB}	12	15	5	20	15	22	15	20	6	11
ЛЕП між вузлами	A_4B_3	A_4B_7	A_4B_8	A_4B_9	A_4B_{10}	A_5B_1	A_5B_2	A_5B_4	A_5B_6	A_5B_7
d_{ij}^{AB}	25	18	6	17	10	7	17	3	18	13

Розв'язання відповідних задач оптимізації виконувалось за допомогою солвера Gurobi [2], доступного на сервері NEOS [5]. Для опису задач лінійного та квадратичного програмування було використано мову моделювання AMPL (A Mathematical Programming Language) [6].

Результати розрахунків для ЛП-задачі з єдиним розв'язком наведені в табл. 2, а для ЛП-задачі з багатьма розв'язками – в табл. 3. У колонках «x^+», «x^-», «y^+», «y^-» наведено оптимальні значення потоків для ЛП-задачі та двох задач квадратичного програмування з різними наборами вагових коефіцієнтів – колонки «u» та «v».

ТАБЛИЦЯ 2. Розподіли потоків для ЛП-задачі з єдиинм розв'язком та двох задач квадратичного програмування

			ЛП-задача		Квадратична задача 1			Квадратична задача 2		
Ребра	d_{ij}^{AA}	x^{up}	x^+	x^-	u_{ij}	x^+	x^-	u_{ij}	x^+	x^-
A_1 A_2	35	800	0	0	1	1.61e-14	1.10e-14	0.5	2.90e-14	2.19e-14
A_2 A_3	70	800	0	0	1	7.97e-15	5.44e-15	0.3333	1.50e-14	1.05e-14
A_3 A_4	50	800	0	0	1	9.32e-15	8.66e-15	0.25	1.80e-14	1.70e-14
A_4 A_5	25	800	0	0	1	2.16e-14	1.54e-14	0.2	4.17e-14	3.03e-14
A_5 A_1	65	800	0	0	1	4.94e-15	1.13e-14	0.1666	9.89e-15	2.04e-14
	d_{ij}^{AB}	y^{up}	y^+	y^-	v_{ij}	y^+	y^-	v_{ij}	y^+	y^-
A_1 B_1	13	180	180	0	1	180	1.05e-14	0.5	180	2.07e-14
A_1 B_2	7	180	180	0	1	180	9.60e-15	0.3333	180	1.88e-14
A_1 B_3	9	180	180	0	1	180	8.53e-15	0.25	180	1.68e-14
A_1 B_4	15	180	180	0	1	180	1.10e-14	0.2	180	2.18e-14
A_1 B_5	20	180	80	0	1	80	2.23e-14	0.1666	80	4.35e-14
A_2 B_2	12	180	180	0	1	180	9.69e-15	0.5	180	1.87e-14
A_2 B_3	15	180	180	0	1	180	8.54e-15	0.3333	180	1.65e-14
A_2 B_5	5	180	80	0	1	80	1.04e-13	0.25	80	7.46e-14
A_2 B_8	20	180	80	0	1	80	1.16e-14	0.2	80	2.18e-14
A_2 B_9	15	180	180	0	1	180	9.83e-15	0.1666	180	1.92e-14
A_3 B_{10}	11	180	170	0	1	170	2.10e-14	0.1666	170	3.90e-14
A_3 B_2	22	180	140	0	1	140	1.04e-14	0.5	140	1.95e-14
A_3 B_5	15	180	0	0	1	1.01e-14	6.44e-14	0.3333	4.40e-14	1.09e-13
A_3 B_6	20	180	160	0	1	160	1.15e-14	0.25	160	2.14e-14
A_3 B_9	6	180	180	0	1	180	1.95e-14	0.2	180	3.51e-14
A_4 B_{10}	10	180	80	0	1	80	2.34e-14	0.1666	80	4.35e-14
A_4 B_3	25	180	40	0	1	40	9.20e-15	0.5	40	1.75e-14
A_4 B_7	18	180	70	0	1	70	1.26e-14	0.3333	70	2.42-14
A_4 B_8	6	180	170	0	1	170	3.99e-14	0.25	170	6.76e-14
A_4 B_9	17	180	140	0	1	140	1.34e-14	0.2	140	2.54e-14
A_5 B_1	7	180	70	0	1	70	3.70e-14	0.5	70	6.07e-14
A_5 B_2	17	180	130	0	1	130	1.35e-14	0.3333	130	2.53e-14
A_5 B_4	3	180	70	0	1	70	1.42e-13	0.25	70	1.36e-13
A_5 B_6	18	180	0	0	1	2.12e-14	1.36e-14	0.2	4.82e-13	2.62e-14
A_5 B_7	13	180	180	0	1	180	1.73e-14	0.1666	180	3.21e-14

З табл. 2 видно, що значення обсягів потоків, отримані для всіх трьох задач збігаються, за винятком того, що обсяги потоків з нульовими компонентами для ЛП-задачі є ненульовими, але дуже малими для задач квадратичного програмування. Розрахунки з табл. 2 підтверджують, що отриманий розподіл потоків потужності є єдиним розв'язком ЛП-задачі.

У табл. 3 наведено розрахунки щодо оптимального розподілу потоків, якщо змінити довжини ліній електропередач для двох ребер, що з'єднують магістральні вузли з вузлами навантаження, для яких обсяги потоків є нульовими в табл. 2. Це ребро між вузлами A_3 та B_5, де $d_{15}^{AB} = 15$ замінено на $d_{15}^{AB} = 5$, та ребро між вузлами A_5 та B_6, де $d_{56}^{AB} = 18$ замінено на $d_{56}^{AB} = 1$.

ТАБЛИЦЯ 3. Розподіли потоків для ЛП-задачі та двох задач квадратичного програмування: багато розв'язків

			ЛП-задача		Квадратична задача 1			Квадратична задача 2		
Ребра	d_{ij}^{AA}	$x^{цр}$	x^+	x^-	u_{ij}	x^+	x^-	u_{ij}	x^+	x^-
A_1 A_2	35	800	0	0	1	1.95e-14	4.75e-14	0.5	2.06e-13	3.99e-13
A_2 A_3	70	800	0	0	1	1.93e-14	1.77e-14	0.3333	1.54e-13	2.81e-13
A_3 A_4	50	800	0	0	1	4.71e-14	1.66e-14	0.25	5.15e-13	1.32e-13
A_4 A_5	25	800	0	0	1	1.05e-13	5.91-14	0.2	4.77e-13	3.88e-13
A_5 A_1	65	800	0	0	1	1.99e-14	2.59e-14	0.1666	2.56e-13	2.04e-13
	d_{ij}^{AB}	$y^{цр}$	y^+	y^-	v_{ij}	y^+	y^-	v_{ij}	y^+	y^-
A_1 B_1	13	180	180	0	1	180	2.49e-14	0.5	180	2.52e-13
A_1 B_2	7	180	180	0	1	180	2.24e-14	0.3333	180	2.39e-13
A_1 B_3	9	180	180	0	1	180	2.07e-14	0.25	180	2.37e-13
A_1 B_4	15	180	180	0	1	180	2.51e-14	0.2	180	2.15e-13
A_1 B_5	20	180	80	0	1	80	7.94e-14	0.1666	80	5.25e-13
A_2 B_2	12	180	180	0	1	180	1.83e-14	0.5	180	1.91e-13
A_2 B_3	15	180	180	0	1	180	1.67e-14	0.3333	180	2.09e-13
A_2 B_5	**5**	**180**	**0**	**0**	**1**	**40**	**2.80e-13**	**0.25**	**46.8929**	**2.05e-12**
A_2 B_8	**20**	**180**	**160**	**0**	**1**	**120**	**2.55e-14**	**0.2**	**113.107**	**2.21e-13**
A_2 B_9	15	180	180	0	1	180	2.69e-14	0.1666	180	2.08e-13
A_3 B_{10}	11	180	180	0	1	180	1.94e-14	0.1666	180	1.56e-13
A_3 B_2	22	180	180	0	1	180	1.55e-14	0.5	180	1.39e-13
A_3 B_5	**5**	**180**	**80**	**0**	**1**	**40**	**7.92e-14**	**0.3333**	**33.1071**	**1.44e-12**
A_3 B_6	**20**	**180**	**30**	**0**	**1**	**70**	**2.31e-14**	**0.25**	**76.8929**	**1.95e-13**
A_3 B_9	6	180	180	0	1	180	3.42e-14	0.2	180	2.60e-13
A_4 B_{10}	10	180	70	0	1	70	4.08e-14	0.1666	70	3.00e-13
A_4 B_3	25	180	40	0	1	40	2.20e-14	0.5	40	2.56e-13
A_4 B_7	**18**	**180**	**160**	**0**	**1**	**120**	**3.82e-14**	**0.3333**	**113.107**	**2.95e-13**
A_4 B_8	**6**	**180**	**90**	**0**	**1**	**130**	**1.91e-13**	**0.25**	**136.893**	**1.47e-12**
A_4 B_9	17	180	140	0	1	140	4.75e-14	0.2	140	3.42e-13
A_5 B_1	7	180	70	0	1	70	5.14e-14	0.5	70	6.99e-13
A_5 B_2	17	180	90	0	1	90	3.25e-14	0.3333	90	2.74e-13
A_5 B_4	3	180	70	0	1	70	2.25e-13	0.25	70	5.35e-13
A_5 B_6	**1**	**180**	**130**	**0**	**1**	**90**	**4.39e-12**	**0.2**	**83.1071**	**5.76e-11**
A_5 B_7	**13**	**180**	**90**	**0**	**1**	**130**	**5.35e-14**	**0.1666**	**136.893**	**4.10e-13**

З табл. 3 видно, що оптимальний розподіл потоків потужності, отриманий як розв'язок ЛП-задачі, не є єдиним. Це підтверджується розв'язками обох задач квадратичного програмування, для яких знайдені обсяги потоків між вісьмома парами вузлів відрізняються як між собою, так і від обсягів потоків, отриманих для ЛП-задачі. В таблиці відповідні їм рядки виділено жирним шрифтом.

Висновки. У статті розроблено математичну модель для знаходження мінімального за моментом потужності розподілу потоків в електромережі. Модель представлено у вигляді задачі лінійного програмування, де мінімізується момент потужності енергосистеми з урахуванням пропускної здатності ліній електропередач, балансових співвідношень в магістральних вузлах мережі та рівнів навантажень енергетичних вузлів. Показано, що оптимальні потоки передаються лише в одному напрямі по ребрах мережі, що відповідає фізичній природі передачі електроенергії в електроенергетичних мережах.

Запропоновано та перевірено на тестовому прикладі алгоритм встановлення єдиності розв’язку отриманої задачі лінійного програмування. Алгоритм базується на порівнянні розв`язків двох задач квадратичного програмування із сепарабельними строго опуклими квадратичними функціями, кожна з яких має єдиний розв’язок. Задачі відрізняються значеннями вагових коефіцієнтів цільових функцій, і якщо їх розв’язки збігаються, то це дає достатню умову єдиності розв’язку задачі лінійного програмування.

Розроблена математична модель може бути використана для балансування регіональних енергосистем за умов знеструмлення магістральних вузлів [1, 7], для чого достатньо відповідні потужності магістральних вузлів вважати нульовими. Запропонований підхід може бути застосований для моделювання широкого класу мережевих систем, наприклад, задач керування потоками в енергетичних, транспортних та логістичних мережах.

Подяка. Робота виконана за підтримки проєкту 2.3/26-П НАН України.

Авторські внески. Стецюк П.І. – концептуалізація, наукове керівництво; Хом’як О.М. – узагальнення результатів, написання тексту, підготовка рукопису; Давидов О.С. – проведення обчислювальних експериментів.

Список літератури

1. Kaplun V., Gai O., Stetsyuk P., Ivlichev A. Provision of optimal dispatching scenarios for regional power systems in the face of uncontrollable power shortages. *Machinery & Energetics*. 2023. **14** (2). P. 23–33. https://doi.org/10.31548/machinery/2.2023.23
2. Gurobi Optimization, Inc., Gurobi Optimizer Reference Manual, 2014. http://www.gurobi.com/ (звернення: 10.04.2026).
3. Murtagh B.A. Advanced linear programming: Computation and practice. McGraw-Hill. New York. 1981. 202 p.
4. Біла Г.Д., Корчинський О.О., Стецюк П.І., Хом’як О.М., Шеховцов С.Б. Використання NEOS-сервера для розв’язання двох класів оптимізаційних задач. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2022. 4. С. 56–81.
5. NEOS Solver. https://neos-server.org/ (звернення: 10.04.2026)
6. Fourer R., Gay D., Kernighan B. AMPL, A modeling language for mathematical programming. 2003. Belmont: Duxburry Press. 526 p.
7. Стецюк П.І., Хом’як О.М. Оптимізаційні моделі балансування регіональної енергосистеми за умов знеструмлення магістральних вузлів. *Допов. Нац. акад. наук України*. 2025. No 6. С. 35–45. https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.06.035

Received/Одержано 24.02.2026 Accepted/Прийнято 26.05.2026 Published/Надруковано 01.06.2026